Sztochasztika
4. gyakorlat

1. (Az eredeti feladat) In a certain village there is a person with name Harry WhoIam. There is no other person with this last name. This village is famous from the fact, that each person have 3 children, and the sex of the children is equally likely to be male or female independenty of each other. The newborns get the last name of their fathers.
   - What is the probability that Harry WhoIam will have **grandson** with last name WhoIam?
   - What is the expected number of **grandsons** with last name WhoIam?
   - What is the probability of the extinction of last name WhoIam in the village?

2. (Módosítások után végül ezt oldottuk meg a gyakorlaton) In a certain village there is a person with name Harry WhoIam. There is no other person with this last name. This village is famous from the fact, that each person have 3 children, and the sex of the children is equally likely to be male or female independenty of each other. The newborns get the last name of their fathers.
   - What is the probability that Harry WhoIam will have **great grandchild** with last name WhoIam?
   - What is the expected number of **grandchildren** with last name WhoIam?
   - What is the probability of the extinction of last name WhoIam in the village?

3. Ottó gyermekeinek száma 0, 1, 2 vagy 3, mindegyik $1/4 - 1/4$ valószínűséggel. Ottó minden egyes leszármazottjának gyermekeinek száma is ugyanilyen eloszlású és a többiekétől független.
   (a) Jelölje $X$ Ottó ükunokáinak számát. Adjuk meg $X$ generátorfüggvényét. Számítsuk ki $\mathbb{E}X$ és $\sigma(X)$ értékét.
   (b) Számítsuk ki annak az esélyét, hogy Ottó leszármazottai előbb-utóbb kihalnak.

4. Jelölje $\Theta(p)$ a kihalás valószínűségét egy olyan elágazó folyamatnál, melynél az utódeloszlás
$$\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^k, \quad k = 0, 1, \dots$$
   (Ez a pesszimista geometriai eloszlás.)
   Számítsuk ki $\Theta(p)$ értékét tetszőleges $0 < p < 1$ esetén.

5. Egy kiszolgálóhoz adatcsomagok érkeznek. Az egy igény kiszolgálása alatt beérkező további igények száma Poisson eloszlású $\lambda$ paraméterrel. Számoljuk ki a foglaltsági periódus alatt kiszolgált igények számának várható értékét. Modellezzük a rendszert elágazó folyamattal. Mik az egyedek? Mik legyenek egy egyed utódai?

6. Legyen egy elágazó folyamat utódeloszlásának generátorfüggvénye $G$. Fejezzük ki $G$ segítségével a következő események feltételes valószínűségét!
   (a) A folyamat kihal, feltéve, hogy az első generáció létszáma $k$.
   (b) A folyamat nem hal ki, feltéve, hogy az első generáció nem halt ki.

7. Egy nagyon nagy közösségben kezdetben egyetlen ember hordoz egy fertőző betegséget. Mielőtt meggyógyulna, továbbadja a betegséget $X_1$ másik embernek, ahol $X_1$ pesszimista geometriai eloszlású $p$ paraméterrel. Miután meggyógyult, nem fertőz tovább. Minden további fertőzött ember a többiektől függetlenül és ugyanilyen eloszlással megfertőz újabb embereket, mielőtt meggyógyul. Modellezzük elágazó folyamattal a történteket, és ennek révén adjunk választ a következő kérdésekre $p = 0,4$ és $p = 0,6$ esetén is.
   (a) Mennyi $X_1$ várható értéke?
   (b) Mekkora annak a valószínűsége, hogy az első emberen kívül senki más nem fertőz tovább (azaz a „második generáció” létszáma 0)?
   (c) Jelölje $X_3$ a harmadik generáció létszámát. Határozzuk meg $\mathbb{E}X_3$ és $\sigma X_3$ értékét.

(d) Mekkora annak a valószínűsége, hogy semelyik generáció sem hal ki? (Ez az esemény felel meg a járvány kialakulásának.)

(e) Jelölje $N$ az összes megbetegedés számát. Határozzuk meg $N$ várható értékét.

(f) Határozzuk meg $N$ generátorfüggvényét. (Tipp: használjunk teljes várható érték tételt az első generáció létszáma szerint.)