

# Matematika A4

## VIII. gyakorlat

### 1. Normális eloszlások

A *standard normális eloszlás* sűrűségfüggvénye:  $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$  ha  $-\infty < x < \infty$ ,

eloszlásfüggvénye:  $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt$  ha  $-\infty < x < \infty$ .

Az  $m \in \mathbb{R}$  és  $\sigma > 0$  paraméterű ( $m$  a várható érték,  $\sigma$  a szórás) *normális eloszlás* a standard normálisból származtatható. Ha  $X$  standard normális eloszlású valószínűségi változó, akkor az  $Y = \sigma X + m$  valószínűségi változó  $m$  és  $\sigma$  paraméterű normális eloszlású;  $Y$  eloszlásfüggvénye:

$$F(y) = \mathbb{P}(Y < y) = \mathbb{P}(\sigma X + m < y) = \mathbb{P}\left(X < \frac{y - m}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{y - m}{\sigma}\right),$$

sűrűségfüggvénye:

$$f(y) = F'(y) = \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{y - m}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y - m}{\sigma}\right)^2}.$$

- Mennyi az alábbi integrálok értéke, mit jelentenek? (a)  $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx$  (b)  $\int_{-\infty}^{\infty} x \varphi(x) dx$  (c)  $\int_{-\infty}^{\infty} |x| \varphi(x) dx$   
(d)  $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 \varphi(x) dx$
- Legyen  $X$  standard normális eloszlású. Számoljuk ki a következő mennyiségeket:  $\mathbf{P}(X < 2.5)$ ,  $\mathbf{P}(-2 < X)$ ,  $\mathbf{P}(-1 < X < 5.2)$ ,  $\mathbf{P}(-1.5 < X < 1.9 | X > 0)$ !
- Számítsuk ki azokat az értékeket, amelyeknél kisebbet egy standard normális eloszlású valószínűségi változó 0.2, 0.9, illetve 0.99 valószínűséggel vesz fel!
- Tegyük fel, hogy  $X$  eloszlása normális 220 várható értékkel és 10 szórással. Számold ki a következő valószínűségeket:
  - $\mathbf{P}(X > 225)$
  - $\mathbf{P}(215 < X < 229)$
  - $\mathbf{P}(215 < X < 229 | X > 225)$
  - $\mathbf{P}(X > 225 | 215 < X < 229)$
- Egy nagy populációban az emberek átlagos testmagassága 178 cm, a magasságok szórása 9 cm, és a magasság normális eloszlásnak tekinthető. Mennyi ekkor annak a valószínűsége, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott személy testmagassága 169 és 187 cm közé esik? Mennyi annak a valószínűsége, hogy ezen személy magasabb

- 2 méternél? Feltéve, hogy a kiválasztott személy testmagassága nagyobb, mint 172 cm, mik az előző pontokban kért események valószínűségei? Most mennyi az az érték, amelynél kisebb magasság 0.2, 0.9, illetve 0.99 valószínűségű (feltétel nélkül)? Szimuláljuk excelben egy véletlenszerűen választott ember testmagasságát!
6. Legyen  $X$  ( $\mu, \sigma$ ) paraméterű normális eloszlású. Határozzuk meg  $\mathbf{P}(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma)$  értékét!
  7. Legyen  $X$  normális eloszlású 4 várható értékkel és 10 szórással. Milyen  $a > 0$ -ra lesz:  $\mathbf{P}(4 - a \leq X \leq 4 + a) = 0.8$ ?
  8. Egy pontosnak tekinthető ismerősünkkel 7 órakor van találkozónk. Érkezése normális eloszlású,  $\sigma = 5$  perc szórással. Melyik az az időpont, amely előtt ismerősünk 0.9 valószínűséggel megérkezik? Szimuláljuk excelben ismerősünk megérkezési idejét!
  9. Megfigyelték, hogy egy napszakban egy metrókocsiban az átlagos utaslétszám 80 fő, a szórással 20 fő. Mekkora a valószínűsége, hogy az utaslétszám egy kocsiban
    - a) 50 fő alatt
    - b) 80 és 100 fő között lesz, ha mindkét esetben feltételezzük, hogy az utaslétszám közelíthető normális eloszlással?
  10. Egy  $X$  valószínűségi változó várható értéke 0, szórással 1. Melyik esetben valószínűbb, hogy  $X > \frac{1}{2}$ ; akkor, ha  $X$  eloszlása normális, vagy akkor, ha egyenletes? (Az  $(a, b)$  intervallumon egyenletes eloszlás szórással  $\frac{b-a}{2\sqrt{3}}$ .)
  11. Egy gyár autómotorokba való gyertyákat készít. A gyertyák működési ideje közelíthető normális eloszlással, átlagosan 1170 órán keresztül működnek, 100 óra szórással. A gyár olyan működési idő garanciát akar vállalni, amelynél hamarabb csak a gyertyák legfeljebb 5%-a hibásodik meg. Hány óra legyen a vállalt működési idő? A gyertyák működési idejének excelben való szimulálásával ellenőrizzük le az előző rész megoldását!
  12. A csokigyárban azt figyelték meg, hogy 1000 tejsokiból körülbelül 10 csoki tömege tér el az előírttól legalább 1 g-mal. Normális eloszlást feltételezve mekkora a csokik tömegének szórással?
  13. Átlagosan 1000 felnőtt emberből 550 nő, 450 pedig férfi. A férfiak testsúlyának a szórással 10 kg és tudjuk, hogy férfiak fele 80 kg-nál könnyebb, míg a nőknél ugyanezen adatok 15 kg, illetve 60 kg. Normális eloszlást feltételezve, mennyi annak a valószínűsége, hogy egy véletlenül választott férfi testsúlya 70 és 90 kg között van? Mi az esélye, hogy egy nő 45 kg-nál könnyebb? Mi annak a valószínűsége, hogy egy ember testsúlya 50 és 100 kg között van.
  14. Egy pékségben minden nap 100 db kenyeret szeretnének legyártani. Ehhez átlagosan 100 kg alapanyagot használnak fel. A pékek pontos emberek, azonban éjjel ébrednek és hajnalban dolgoznak így elég álmosak ezért átlagosan minden 7-edik kenyér tömege az átlagostól legalább 10 dkg-mal eltér. Az elkészült kenyereknek mi az átlagos tömege és mekkora a szórással?
  15. Sok intelligencia teszt normális eloszlást követ, 100 pont várható értékkel és 15 pont szórással. Ha ezeknek a teszteknek és értékelésüknek hihetünk, akkor az emberiség hány százalékának van 95 és 110 pont között az IQ-ja? A 100 pont körüli mekkora intervallumban van az emberiség 50%-ának az IQ-ja? Egy 2500 fős településen várhatóan hány embernek lesz 125 pont fölött az IQ-ja?
  16. Az IQ teszteknek még mindig hiszünk és tegyük fel, hogy az eredmény 100 pont várható értékű és 15 szórással normális eloszlást követ. A tesztek megírt és kiértékelt alanyokat általában 3 csoportba szokták sorolni: alacsony-, átlagos-, illetve magas intelligenciahányadosúak. A résztvevőknek rendre 20, 65 illetve 15%-a került a megfelelő csoportokba. Hol húzták meg a határokat, azaz melyek azok a pontszámok melyek megkülönböztetik az egyes csoportokat?

A standard normális eloszlásfüggvény táblázata:  $\Phi(x)$  értékei

$x$	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

## 2. Többdimenziós diszkrét eloszlások

17. Egy urnában van 7 piros, 6 kék és 5 zöld golyó. Kihúzzunk visszatevés nélkül hármat. Legyen  $X$  a kihúzottak közül a pirosak száma,  $Y$  pedig a kékeké. Adjuk meg  $(X, Y)$  együttes eloszlását, és a peremeloszlásokat!
18. Először egy (szabályos) kockával dobunk, majd annyi (igazságos) érmével, ahányast a kockával dobtunk. Mi a valószínűsége, hogy a kockával 4-est dobunk és az érmékkel 2 fejet kapunk? Mi a valószínűsége, hogy 5 fejet kapunk? Adjuk meg az együttes és feltételes eloszlásokat is!
19. Vegyük azt a két dimenziós diszkrét eloszlást, aminek a valószínűségeit az alábbi táblázat határozza meg!

$X \setminus Y$	1	2	3
1	0.1	0.2	0.2
2	0.1	0.2	0
3	0.1	0	0.1

- a) Mi a valószínűsége, hogy  $X = 2$  és  $Y = 1$  ?
- b) Mi a valószínűsége, hogy  $Y = 3$ ?
- c)  $X^2Y$  várható értéke?
- d) Feltéve, hogy  $Y = 3$ , mi  $X$  eloszlása?
- e) Független-e  $X$  és  $Y$ ?
20. Két kockával dobva, mi a dobott számok
- a) összegének és különbségének;
- b) minimumának és maximumának;
- c) maximumának, illetve összegének;
- az együttes eloszlása? Független-e a marginálisok egymástól?
21. Kockával dobva az első, illetve második páros dobáshoz szükséges időt jelölje  $X_1$  illetve  $X_2$ . Mi az eloszlása  $(X_1, X_2)$  párnak? Adjuk meg a feltételes eloszlásokat is!
22. Kockával dobunk addig, amíg nem páros szám jön! Ehhez szükséges dobások számát jelölje  $N$  és legyen  $X$  az első nem páros dobás értéke. Mi az eloszlása  $X$ -nek, illetve  $N$ -nek? Független-e  $X$   $N$ -től? Adjuk meg az együttes eloszlásukat is!