VIK, Műszaki Informatika

ANALÍZIS (1)

Numerikus sorok

Oktatási segédanyag

A Villamosmérnöki és Informatikai Kar
műszaki informatikus hallgatóinak tartott előadásai alapján
összeállította:

Fritz Józsefné dr.

Kónya Ilona

2004. szeptember

Szerkesztette: Győri Sándor

1. Numerikus sorok konvergenciája

A $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ végtelen összeghez hozzárendelünk egy (s_n) számsorozatot a következő módon:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{a_1}_{s_1} + a_2}_{s_2} + a_3}_{s_3} + \cdots + a_n}_{s_n} + \cdots$$

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k : \quad n\text{-edik részletösszeg}$$

E számsorozat határértékének segítségével definiáljuk a sor összegét az alábbiaknak megfelelően.

D A $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ numerikus sor konvergens és összege s, ha létezik a

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right) = s \in \mathbb{R}$$

(véges) határérték.

A részletösszegek (s_n) sorozatának viselkedése szerint az alábbi esetek lehetségesek:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} s_n = \begin{cases} s \in \mathbb{R}, & \text{az összeg konvergens} \\ \left.\begin{array}{r} +\infty, \\ -\infty, \\ \nexists, \end{array}\right\} & \text{az összeg divergens.} \end{cases}$$

Pl. $\sum_{k=1}^{\infty} 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + \cdots$ esetén $s_n = \sum_{k=1}^{n} 1 = n$

$$\Longrightarrow \lim_{n\to\infty} s_n = \infty \qquad \text{(Divergens a sor.)}$$

Pl. $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots + (-1)^k + \cdots$ divergens, mert

$$\left.\begin{array}{l} s_{2k+1} = 1 \to 1 \\ s_{2k} = 0 \to 0 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad (s_n) \text{ -nek 2 torlódási pontja van, a sor divergens.}$$

Pl.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \underbrace{\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^n}_{s_n} + \cdots = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{1}{2}\,\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}{\frac{1}{2} - 1}}_{s_n} = \frac{1}{2}\quad\frac{-1}{-\frac{1}{2}} = 1\ ,$$

tehát a sor konvergens.

Pl.

$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\,(k+1)} = 1}$, mert

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{-1}{k+1} + \frac{1}{k}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\left(\frac{-1}{2} + 1\right) + \left(\frac{-1}{3} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{-1}{4} + \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{-1}{n+1} + \frac{1}{n}\right) \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1, \qquad \text{konvergens a sor.}$$

Pl. $\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \quad \text{(harmonikus sor) divergens}}$

Ugyanis

$$s_{2^k} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\cdots + \frac{1}{2^{k-1}}\right) + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right) \geq$$

$$\geq 1 + \frac{1}{2} + 2\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{8} + \cdots + 2^{k-1}\cdot\frac{1}{2^k} = 1 + k\cdot\frac{1}{2} \to \infty$$

$$\lim_{k\to\infty} s_{2^k} = \infty \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = \infty}$$

Ugyanis $s_n \geq s_{2^k}$, ha $n > 2^k$ miatt $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$.

●●●

(T) **Geometriai sor**

$$1+q+q^2+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-q}\,, & \text{ha } |q|<1\\ \infty\,, & \text{ha } q\geq 1\\ \text{divergens}\,, & \text{ha } q\leq -1\end{cases}$$

(B) $s_n=\sum\limits_{k=1}^{n} q^{k-1}=1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}$

Ha $q=1$:

$$s_n=n\,,\quad \text{ezért}\quad \lim_{n\to\infty} s_n=\infty\,.$$

Ha $q\neq 1$:

$$s_n=\frac{q^n-1}{q-1}.$$

Mivel $q^n\to 0$, ha $|q|<1$, ezért

$$\lim_{n\to\infty} s_n=\frac{-1}{q-1}=\frac{1}{1-q}\,,\ \text{ha}\ |q|<1.$$

Mivel $q^n\to\infty$, ha $q>1$ $\Longrightarrow$ $s_n\to\infty$, ha $q>1$.

Ha $q=-1$:

q^n-nek két torlódási pontja van, mégpedig $t_1=1\,,\ t_2=-1\,.$

$\Longrightarrow$ s_n-nek is 2 torlódási pontja van: 0 és 1, tehát divergens.

Ha $q<-1$:

q^n-nek két torlódási pontja van, mégpedig $t_1=-\infty\,,\ t_2=\infty\,.$

$\Longrightarrow$ s_n-nek is 2 torlódási pontja van: $-\infty$ és ∞, tehát divergens.

■

(Pl.) $\sum\limits_{k=3}^{\infty} q^k=q^3+q^4+q^5+\cdots=\dfrac{q^3}{1-q}\,,$ ha $|q|<1\,.$

A részletösszegek a tételben szereplő részletösszegek q^3-szeresei, így a határérték (a sor összege) is q^3-nel szorzódik.

(Pl.) $\boxed{\sum\limits_{k=0}^{\infty} a\,q^k=\sum\limits_{k=1}^{\infty} a\,q^{k-1}=\dfrac{a}{1-q}\,,\ \text{ha}\ |q|<1}$

Most a részletösszegek a tételben szereplő részletösszegek a-szorosai, így a határérték is a-szoros lesz.

$\left(\text{A képletet úgy érdemes megjegyezni, hogy}\quad s=\dfrac{\text{első tag}}{1\,-\,\text{kvóciens}}\,.\right)$

(M) Ha a sorban *véges sok* tagot elhagyunk vagy megváltoztatunk, akkor a konvergencia ténye nem változik, konvergens sorból konvergens sort, divergens sorból divergens sort kapunk. A sorösszeg értéke természetesen megváltozik.

Ⓜ $\sum_{k=1}^{\infty}(c\cdot a_k)$ és $\sum_{1}^{\infty} a_k$ $(c\neq 0)$ egyszerre konvergens illetve divergens.

(Ugyanis $s_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$ és $s_n^*=\sum_{k=1}^{n}(c\cdot a_k)$ egyidejűleg konvergens illetve divergens.)

Pl. $$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-3)^{k+2}}{2^{2k+1}}=\frac{(-3)^2}{2^1}\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{-3}{4}\right)^k=\frac{9}{2}\;\frac{\left(\frac{-3}{4}\right)^2}{1-(\frac{-3}{4})}$$

$$\left(q=\frac{-3}{4}\,,\quad |q|<1\ \text{ teljesül.}\right)$$

Pl. $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k+3^{k+1}}{4^{k+2}}=?$$

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{2^k}{4^{k+2}}+\frac{3^{k+1}}{4^{k+2}}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{16}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^k+\frac{3}{16}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^k\right)$$

$$s_n=\frac{1}{16}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k+3\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{4}\right)^k\right)\to\frac{1}{16}\cdot\left(\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}+3\cdot\frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}}\right)=\frac{5}{8}$$

Pl. Milyen x-re konvergens a $\sum_{k=0}^{\infty}(\log_2 x)^k$ sor?

$q=\log_2 x,\quad |\log_2 x|<1 \iff -1<\log_2 x<1,$

$2^{-1}<\; x \;<2,$ azaz $x\in(2^{-1},2)$.

•••

A konvergencia szükséges és elégséges feltétele (Cauchy kritérium):

Ⓣ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ akkor és csak akkor konvergens, ha $\forall\,\varepsilon>0$-hoz $\exists\, M(\varepsilon)$:

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+k}|<\varepsilon,\quad \text{ha } n>M(\varepsilon) \text{ és } k\in\mathbb{N}^+$$

Ⓑ Triviálisan igaz, hiszen a számsorozatok konvergenciájára tanult szükséges és

elégséges tétel alkalmazható. (s_n) akkor és csak akkor konvergens, ha $\forall \varepsilon > 0$ -hoz $\exists\, M(\varepsilon)$, hogy $n, m > M(\varepsilon)$ esetén $|s_m - s_n| < \varepsilon$.
Legyen $m > n$ és $m = n + k$! Mivel

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n\,,$$

$$s_m = s_{n+k} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}\,.$$

Ezért

$$|s_m - s_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| < \varepsilon\,,$$

ha $n > M(\varepsilon)$ és $k \in \mathbb{N}^+$ tetszőleges. ∎

Pl. $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\,\frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \quad \text{konvergens}}$

Ugyanis

$$|s_{n+k} - s_n| = |a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k}| = \left|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \cdots + \frac{(-1)^{k+1}}{n+k}\right| =$$

$$= \begin{cases} \underbrace{\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)}_{>0} + \underbrace{\left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right)}_{>0} + \cdots + \underbrace{\left(\frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k}\right)}_{>0} = \\ = \frac{1}{n+1} - \underbrace{\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right)}_{>0} - \cdots - \underbrace{\left(\frac{1}{n+k}\right)}_{>0}, \qquad \text{ha } k \text{ páros} \\ \\ \underbrace{\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)}_{>0} + \underbrace{\left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4}\right)}_{>0} + \cdots + \underbrace{\left(\frac{1}{n+k-2} - \frac{1}{n+k-1}\right)}_{>0} + \frac{1}{n+k} = \\ = \frac{1}{n+1} - \underbrace{\left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right)}_{>0} - \cdots - \underbrace{\left(\frac{1}{n+k-1} - \frac{1}{n+k}\right)}_{>0}, \qquad \text{ha } k \text{ páratlan} \end{cases}$$

Vagyis

$$|s_{n+k} - s_n| < \frac{1}{n+1} < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad n > \frac{1}{\varepsilon} - 1 \quad \Longrightarrow \quad N(\varepsilon) \geq \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right]$$

Későbbiekben könnyen ellenőrizhetjük, hogy ez egy úgynevezett Leibniz sor.

1.1. A konvergencia szükséges feltétele

(T) $$\boxed{\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergens}\right) \quad \Longrightarrow \quad \left(\lim_{k\to\infty} a_k = 0\right)}$$

(B) A Cauchy kritériumból ($k=1$ választással):

$$|s_{n+1} - s_n| = |a_{n+1}| < \varepsilon, \quad \text{ha } n > N(\varepsilon) \quad \Longrightarrow \quad a_n \to 0$$

Vagy (egy másik bizonyítás)

$$s_n = s_{n-1} + a_n \quad \Longrightarrow \quad a_n = s_n - s_{n-1} \to s - s = 0$$

∎

(M) A feltétel nem elégséges. Például a $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ sor a feltételt teljesíti, mégis divergens.

2. Váltakozó előjelű (alternáló) sorok

$$c_1 - c_2 + c_3 - \cdots + (-1)^{n+1} c_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}\, c_n \quad , \qquad c_n > 0$$

Leibniz kritérium:

(T) Ha az alternáló sor tagjainak abszolút értékeiből képzett sorozat (fent (c_n)) monoton fogyóan tart 0-hoz (jelben $c_n \searrow 0$), akkor a sor konvergens.

Az ilyen alternáló sor neve: **Leibniz sor**.

(B) Belátjuk, hogy $s_{2k} \nearrow$ és felülről korlátos:

$$s_{2k+2} = s_{2k} + \underbrace{(c_{2k+1} - c_{2k+2})}_{\geq 0} \geq s_{2k} \quad \Longrightarrow \quad s_{2k} \nearrow$$

Másrészt

$$\underbrace{0 \leq s_{2k+2}}_{\text{az előzőből látható}} = c_1 - \underbrace{(c_2 - c_3)}_{\geq 0} - \underbrace{(c_4 - c_5)}_{\geq 0} - \cdots - \underbrace{(c_{2k+2})}_{\geq 0} \leq c_1$$

Tehát s_{2k} monoton növő és felülről korlátos $\Longrightarrow$ s_{2k} konvergens, legyen $s = \lim\limits_{k\to\infty} s_{2k}$.
Megmutatjuk, hogy $s_{2k+1} \to s$ szintén, és így a sor konvergens.

$$s_{2k+1} = s_{2k} + c_{2k+1} \to s + 0 = s$$

■

(M) Az is megmutatható, hogy az s_{2k+1} részsorozat monoton csökkenően tart s-hez.

$$\begin{aligned} 0 \le s_{2k+1} &= (c_1 - c_2) + (c_3 - c_4) + \cdots + (c_{2k-1} - c_{2k}) + c_{2k+1} = \\ &= \underbrace{(c_1 - c_2) + (c_3 - c_4) + \cdots + c_{2k-1}}_{s_{2k-1}} - \underbrace{(c_{2k} - c_{2k+1})}_{\ge 0} \le s_{2k-1} \end{aligned}$$

Hibabecslés Leibniz típusú soroknál

Tehát a Leibniz típusú soroknál a páros indexű részletösszegek s-nél kisebbek vagy egyenlők:

$$s_{2k} \le s.$$

A páratlan indexű elemek monoton csökkenve tartanak s-hez, ezért

$$s \le s_{2k+1}.$$

Mivel

$$s - s_{2k} \le s_{2k+1} - s_{2k} = c_{2k+1} \quad \text{és} \quad s_{2k+1} - s \le s_{2k+1} - s_{2k+2} = c_{2k+2},$$

ezért

$$|H| = |s - s_n| \le c_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

●●●

(Pl.) $$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[3]{2n+1}}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} c_n$$

A sor Leibniz típusú és így konvergens, mivel $c_n = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2n+1}} \searrow 0$.

(Pl.) $$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[n]{2n+1}}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} c_n$$

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt[n]{3}\ \sqrt[n]{n}}}_{\substack{\downarrow \\ 1}} = \frac{1}{\sqrt[n]{2n+n}} \le c_n < 1 \to 1$$

$\Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} c_n = 1 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$, tehát nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele, így a sor divergens.

Pl. $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \, \frac{n+1}{n^2+2}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \, c_n$

$$c_n = \frac{\frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}{1 + \frac{2}{n^2}} \quad \to \quad 0$$

A monoton csökkenés most nem triviálisan igaz, hiszen n növelésével a számláló és a nevező is nő. Várható, hogy a (c_n) sorozat monoton csökkenő, mert a nevező "gyorsabban nő". De ezt ilyenkor be kell bizonyítanunk! Tehát igaz-e, hogy

$$\begin{aligned} c_{n+1} &\overset{?}{\leq} c_n \\ \frac{(n+1)+1}{(n+1)^2+2} &\overset{?}{\leq} \frac{n+1}{n^2+2} \\ (n+2)\,(n^2+2) &\overset{?}{\leq} (n+1)\,(n^2+2n+3) \\ 0 &\overset{?}{\leq} n^2+3n-1 \qquad \text{Ez pedig igaz, minden } n \text{ -re} \,. \end{aligned}$$

Tehát a sor Leibniz típusú és így konvergens.

2.1. Feladatok a váltakozó előjelű sorokhoz

Vizsgálja meg konvergencia szempontjából az alábbi sorokat!

1. $\sum_{2}^{\infty} \frac{\cos k\pi}{\lg k}$

2. $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n}}$

3. $\sum_{2}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \, 2k}{k^2-1}$

4. $\sum_{2}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$

3. Sorok abszolút és feltételes konvergenciája

(D) $\sum^{\infty} a_k$ sor *abszolút konvergens*, ha $\sum^{\infty} |a_k|$ konvergens.

Pl. $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k$ abszolút konvergens.

(Konvergens geometriai sorokról van szó, ahol a kvóciens $-\frac{1}{2}$ illetve $\frac{1}{2}$.)

$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ nem abszolút konvergens, de konvergens.

(D) *Feltételesen konvergens sor:*
a konvergens, de nem abszolút konvergens sor

Ilyen pl. a $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$ sor.

Ugyanis beláttuk, hogy ez a sor konvergens, de a $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ sor divergens.

(T) $$\left(\sum^{\infty} |a_k| \text{ konvergens}\right) \implies \left(\sum^{\infty} a_k \text{ konvergens}\right)$$
Tehát az abszolút konvergenciából következik a konvergencia.

(B) Ha $\sum^{\infty} |a_k|$ konvergens, akkor teljesül rá a Cauchy kritérium, továbbá

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+k}| \ \le\ |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+k}|$$

miatt

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+k}| \le \underbrace{||a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+k}|| < \varepsilon, \quad \text{ha } n > M(\varepsilon),\ k \in \mathbb{N}^+}_{\text{Cauchy kritérium } \sum^{\infty} |a_k|\text{-ra}}$$

Így $\sum^{\infty} a_k$-ra is teljesül a szükséges és elégséges tétel (Cauchy kritérium), tehát konvergens. ■

Ez a tétel azt mutatja, hogy az abszolút konvergencia vizsgálata igen hasznos lehet. A $\sum^{\infty} |a_k|$ sor elemei nem negatívak, sőt pozitívnak tekinthetők, mivel a nulla elemeket nyilván nem kell figyelembe vennünk.

4. Pozitív tagú sorok

T
(i) Egy pozitív tagú sor részletösszegei monoton növekedőek.

(ii) Egy pozitív tagú sor akkor és csak akkor konvergens, ha részletösszegeinek sorozata korlátos.

B

(i) Ha $a_n \geq 0$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, akkor $s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \geq s_n \quad \forall\, n$-re.

(ii) a) Ha a sor konvergens, akkor (s_n) konvergens $\quad\Longrightarrow\quad (s_n)$ korlátos

b) Ha (s_n) korlátos, akkor $(s_n) \nearrow$ miatt (s_n) konvergens.

■

M Pozitív tagú sor vagy konvergens, vagy ∞-nel egyenlő. Ez nem igaz általánosságban egy váltakozó előjelű sorra, ahol a részletösszegek sorozatának lehet több torlódási pontja (pl. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k$).

T
$a_k > 0;\ a_k \geq a_{k+1}$ feltételek mellett

a $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sor akkor és csak akkor konvergens, ha $\displaystyle\sum_{l=1}^{\infty} a_{2^l} \cdot 2^l$ is konvergens

B ($\neg$B)
A bizonyítás lényege, hogy az első sor részletösszegei a második sor megfelelő részletösszegeivel alulról és felülről is becsülhetőek. A becslés igazolásához fontos feltenni, hogy az (a_k) sorozat monoton csökken.
(A részletes bizonyítás megtekinthető Walter Rudin: A matematikai analízis alapjai című könyvében.)

Példák a tétel alkalmazására:

Pl. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergens, ha $\alpha > 1$. Egyébként divergens.

Ha $\alpha \leq 0$: $\quad a_n = \dfrac{1}{n^\alpha} = n^{|\alpha|} \not\to 0$

A konvergencia szükséges feltétele nem teljesül $\quad\Longrightarrow\quad$ divergens a sor.

Ha $\alpha > 0$: $\quad a_n = \dfrac{1}{n^\alpha} \searrow$, így alkalmazható az előző tétel:

Vagyis $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ és $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(2^l)^\alpha} \cdot 2^l$ egyidejűleg konvergens, illetve divergens.

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{(2^l)^\alpha} \cdot 2^l = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\alpha l}} \frac{1}{2^{-l}} = \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{l\alpha - l} = \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{(\alpha-1)l} = \sum_{l=1}^{\infty} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1}\right)^l = \sum_{l=1}^{\infty} q^l$$

Geometriai sort kaptunk, mely csak akkor konvergens, ha

$$|q| = \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1} < 1.$$

Tehát a konvergencia csak akkor teljesül, ha $\alpha - 1 > 0$, vagyis $\alpha > 1$.

Vigyázat! A tételben szereplő két sor összege nem azonos, tehát nem tudtuk megállapítani a $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ sor összegét, csak a konvergencia tényét tudtuk megállapítani $\alpha > 1$-re. Ilyenkor a megfelelő s_n részletösszeggel tudjuk közelíteni a sor összegét az esetleg előírt pontossággal (lásd hibabecslések).

Pl. $\boxed{\sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \log_2 n} \quad \text{divergens}}$

Ugyanis: $$\sum_{l=l_1}^{\infty} \frac{1}{2^l \cdot \log_2 2^l} \cdot 2^l = \sum_{l=l_1}^{\infty} \frac{1}{l} \qquad \text{divergens.}$$

Pl. $\boxed{\sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot (\log_2 n)^p} \quad p > 1 \text{ konvergens, egyébként divergens}}$

$p > 0$ esetén alkalmazható az előző tétel:

$$\sum_{l=l_1}^{\infty} \frac{1}{2^l \cdot (\log_2 2^l)^p} \cdot 2^l = \sum_{l=l_1}^{\infty} \frac{1}{l^p} \qquad 0 < p \le 1: \text{ div.}; \quad 1 < p: \text{ konv.}$$

($p \le 0$ esete HF. Pl. minoráns kritériummal — lásd később — megmutatható.)

Pl. $\boxed{\sum_{n=n_1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \log_2 n \cdot \log_2 \log_2 n} \quad \text{divergens}}$

A tétel alkalmazható.

$$\sum_{l=l_1}^{\infty} \frac{1}{2^l \cdot (\log_2 2^l) \cdot (\log_2 \log_2 2^l)} \cdot 2^l = \sum_{l=l_1}^{\infty} \frac{1}{l \cdot \log_2 l} \quad \text{ez pedig divergens}$$

5. Pozitív tagú sorok konvergenciájával kapcsolatos elégséges kritériumok

- majoráns kritérium (csak konvergencia eldöntésére)
- minoráns kritérium (csak divergencia eldöntésére)
- hányados kritérium
- gyökkritérium
- integrál kritérium

Ezeket a kritériumokat kizárólag pozitív tagú sorokra alkalmazhatjuk. Így a szóbanforgó kritériumok hasznosak lehetnek az abszolút konvergencia eldöntésére (amiből következik az eredeti — nem feltétlenül pozitív tagú — sor konvergenciája is.)

5.1. Majoráns kritérium

T $$\boxed{\text{Ha } 0 < a_n \le c_n \quad \forall\, n\text{-re} \quad \text{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty} c_n \ \text{konvergens} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \text{konvergens}}$$

B A megfelelő részletösszegek sorozatára a feltétel miatt fennáll, hogy

$$s_n^a \le s_n^c.$$

Továbbá $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergenciája miatt $s_n^c \le K \quad \Longrightarrow \quad s_n^a$ korlátos és pozitív tagú a sor

$$\Longrightarrow \quad \sum_{1}^{\infty} a_n \ \text{konv.}$$

■

5.2. Minoráns kritérium

(T) $$\boxed{\text{Ha } 0 \le d_n \le a_n \quad \forall\, n\text{-re} \quad \text{és} \quad \sum_{n=1}^{\infty} d_n \text{ divergens} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergens}}$$

(B) $s_n^a \ge s_n^d \to \infty \quad \Longrightarrow \quad s_n^a \to \infty \quad$ (spec. rendőrelv) ■

(M) Mindkét esetben elegendő, ha a feltétel $\forall\ n$ helyett $n \ge N_0$-ra teljesül.

($\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ és $\sum\limits_{n=N_0}^{\infty} a_n$ egyidejűleg konvergens ill. divergens, hiszen az első szumma részletösszegei $c = \sum\limits_{n=1}^{N_0-1} a_n$ konstanssal nagyobbak, mint a második szumma részletösszegei.)

(Pl.) $$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

A harmonikus sorból végtelen sok tagot elhagytunk. Vajon konvergens-e az új sor? A minoráns kritériummal belátjuk, hogy még ez a sor is divergens. Ugyanis

$$a_n > \frac{1}{2n+n} = \frac{1}{3n}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n} = \frac{1}{3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \ \text{ divergens} \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \text{ divergens}$$

(Pl.) $$\boxed{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2n^5+3}}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

$$a_n < \frac{1}{\sqrt{2n^5}} = \frac{1}{\sqrt{2}\, n^{5/2}}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{5/2}} \ \text{ konvergens } \left(\alpha = \frac{5}{2} > 1\right) \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \text{ konvergens}$$

(Pl.) $$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{2n^5+3}}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

A sor divergens, mivel a rendőrelvvel megmutatható, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$, tehát nem tart nullához, így nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele. Részletezve:

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt[n]{5}\ \left(\sqrt[n]{n}\right)^5}}_{\downarrow \atop \frac{1}{1\cdot 1^5}=1} = \frac{1}{\sqrt[n]{2n^5+3n^5}} \le a_n = \frac{1}{\sqrt[n]{2n^5+3}} < \frac{1}{\sqrt[n]{1}} = \underbrace{1}_{\downarrow \atop 1}$$

$$\Longrightarrow \quad a_n \to 1\,.$$

(Pl.) $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{3n^4+5}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

$$a_n < \frac{n+2n}{3n^4} = \frac{1}{n^3}\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \text{ konvergens } (\alpha = 3 > 1) \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens}$$

(Pl.) $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-32}{n^3+8}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

$n \ge 4$-re a sor pozitív tagú. A minoráns kritériummal megmutatjuk, hogy divergens. Ugyanis, ha $n \ge 6$, akkor $n^2 > 32$ és ezért

$$a_n = \frac{2n^2-32}{n^3+8} > \frac{2n^2-n^2}{n^3+8n^3} = \frac{1}{9n}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{9n} = \frac{1}{9} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ divergens}$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergens.}$$

(Pl.) $\boxed{\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n+3^{n+1}}{2^{2n+3}+5}} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$

$$a_n = \frac{2^n+3\cdot 3^n}{8\cdot 4^n+5} < \frac{3^n+3\cdot 3^n}{8\cdot 4^n} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n \text{ konvergens geometriai sor } \left(q = \frac{3}{4},\ |q| < 1\right) \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens}$$

Feladatok

Vizsgálja meg konvergencia szempontjából az alábbi sorokat!

1. $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{3n+2}$
2. $\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n^2-\sqrt{n}}$
3. $\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \log_2 n}$
4. $\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n \log_2 n^2}$
5. $\sum_{1}^{\infty} \frac{2^n}{2^{n+2}-3}$
6. $\sum_{1}^{\infty} \frac{2^n}{2^{2n}-3}$
7. $\sum_{1}^{\infty} \frac{2^{2n}}{2^n-3}$
8. $\sum_{1}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{6^n+2^{n+1}}$
9. $\sum_{1}^{\infty} \frac{3^n+n}{n\cdot 4^n-3}$
10. $\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^2$
11. $\sum_{1}^{\infty} \frac{7n^5-2n^3+1}{n^6+3n^2-\sqrt{n}}$
12. $\sum_{1}^{\infty} \frac{7n^5-2n^3+1}{n^7+n^2-n+3}$
13. $\sum_{1}^{\infty} \frac{7n^5+n^3+1}{n^8-n^2+3}$
14. $\sum_{6}^{\infty} \frac{\binom{n}{2}}{\binom{n}{4}}$

5.3. Hányados kritérium

T_1

$$\boxed{\begin{array}{l} 1.\ (a_n > 0,\ \forall\ n) \land \left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \le q < 1,\ \forall\ n\right) \implies \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \text{konvergens.} \\[2ex] 2.\ (a_n > 0,\ \forall\ n) \land \left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \ge q \ge 1,\ \forall\ n\right) \implies \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \ \text{divergens.} \end{array}}$$

B

1. Mivel $a_{n+1} \le q\, a_n \le q^2\, a_{n-1} \le q^3\, a_{n-2} \le \cdots \le q^n\, a_1, \quad \forall\ n\,,$ ezért

$\sum\limits_1^\infty a_n$ -nek $\sum\limits_1^\infty q^{n-1}\, a_1$ konvergens majoránsa (geometriai sor, $0 < q < 1$) $\Longrightarrow$
$\sum\limits_1^\infty a_n$ konvergens.

2. Mivel $a_{n+1} \geq q\, a_n \geq q^2\, a_{n-1} \geq \cdots \geq q^n\, a_1, \quad \forall\, n$, ezért
$\sum\limits_1^\infty a_n$ -nek $\sum\limits_1^\infty q^{n-1}\, a_1$ divergens minoránsa (geometriai sor, $q \geq 1$) $\Longrightarrow$
$\sum\limits_1^\infty a_n$ divergens.

$\blacksquare$

(M1) $\sum\limits_1^\infty a_n$ és $\sum\limits_{N_0}^\infty a_n$ egyidejűleg konvergens ill. divergens, ezért elég, ha a T_1 feltételei $\forall\, n \geq N_0$ -ra teljesülnek.
(Természetesen, ha konvergensek, akkor az első sor összege $a_1 + a_2 + \cdots + a_{N_0-1}$ -gyel több, mint a második sor összege.)

(M2) T_1 (1)-nél nem elég megmutatni, hogy $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$, q -t is kell találni.

(Pl.) $\sum\limits_1^\infty \dfrac{1}{n}$ divergens, pedig

$$a_n = \frac{1}{n}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \quad \text{miatt} \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} < 1\,.$$

(Pl.) $\sum\limits_1^\infty \dfrac{1}{n^2}$ konvergens. És most is

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 < 1\,. \qquad (\text{De } \nexists \quad 0 < q < 1)$$

T_1 (2)-nél viszont q megtalálása nem fontos. A tétel így is kimondható.

$$(a_n > 0) \ \wedge \ \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1,\ \forall\, n \geq N_0\right) \quad \Longrightarrow \quad \sum_1^\infty a_n \text{ div.}$$

Ekkor ugyanis:

$0 < a_n \le a_{n+1}$, tehát $a_n \nearrow$ (és $a_n > 0$) $\implies$ $a_n \not\to 0$ (nem teljesül a szükséges feltétel) $\implies$ $\sum_{1}^{\infty} a_n$ divergens

A hányados kritérium egy kényelmesebben használható formában is kimondható:

T_{1^*}

1. $(a_n > 0, \forall\, n) \wedge \left(\exists \lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = c < 1\right) \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konv.

2. $(a_n > 0, \forall\, n) \wedge \left(\exists \lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = c > 1 \text{ vagy } \lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \infty\right) \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ div.

B

1. Legyen $\varepsilon = \dfrac{1-c}{2}$, így $q = c + \varepsilon < 1$. A határérték tulajdonsága miatt

   $$\frac{a_{n+1}}{a_n} < q < 1\,, \quad \forall\, n > N(\varepsilon).$$

   Ezért T_1 (1)-ből adódik, hogy $\sum_{n=N(\varepsilon)}^{\infty} a_n$ és így vele együtt $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is konvergens.

2. Legyen $\varepsilon = \dfrac{c-1}{2}$, így $q = c - \varepsilon > 1$. Ekkor $\exists\, N(\varepsilon)$, hogy

   $$\frac{a_{n+1}}{a_n} > q > 1, \quad \forall\, n > N(\varepsilon).$$

   Így T_1^* (2)-ből adódik az állítás. ∎

T_1^* (2) állítása $c = \infty$ esetén is igaz. Ugyanis, ha $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$, akkor is található megfelelő q. (Pl. $q = 2$ is választható.)

M_3 Ha $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, akkor nem tudtunk meg semmit a konvergenciáról. Lehet a sor konvergens és divergens is.
Pl. $\sum_{1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ divergens, és a $\sum_{1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ konvergens sorok esetén egyaránt $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

M_4 A fenti tétel tovább finomítható. Bebizonyíthatók az alábbi állítások is:

$$\text{Ha } a_n > 0\ \forall n, \text{ és } \overline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \implies \sum_{1}^{\infty} a_n \text{ konvergens.}$$

$$\text{Ha } a_n > 0 \ \forall n, \text{ és } \ \underline{\lim} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{1}^{\infty} a_n \text{ divergens.}$$

($\overline{\lim} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ a konvergenciáról nem mond semmit.)

(Pl.) Konvergens-e az alábbi sor?

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)\ 3^{n+1}}{n!}}$$

A feladatot a T_1^* tétellel (hányadoskritériummal) oldjuk meg.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+3)\ \ 3^{n+2} \quad n!}{(n+1)! \quad (n+2)\ \ 3^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3\ (n+3)}{(n+1)\ (n+2)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} \quad \frac{1+\frac{3}{n}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)} = 0 < 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum^{\infty} a_n \ \text{ konvergens.}$$

5.3.1. Feladatok

Vizsgálja meg az alábbi sorokat konvergencia szempontjából!

1. $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{\left(\sqrt{2}\right)^n}{(2n+1)!}$

2. $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{2^n}{3^{n+2}\ (n+2)!}$

3. $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

4. $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

5. $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{n+2}{(n+1)^{n+3}}$

6. $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{n^k}{n!}, \quad k \in \mathbb{N}^+$

5.4. Gyökkritérium

T₂

Ha $\forall n \geq N$-re $a_n > 0$ és
1. $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1 \implies \sum_N^\infty a_n$ konv.
2. $\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \implies \sum_N^\infty a_n$ div.

B

1. $0 < a_n \leq q^n$ és $\sum_N^\infty q^n$ konvergens $\implies \sum_N^\infty a_n$ konvergens a majoráns kritérium miatt.
2. $a_n \geq 1 \implies a_n \not\to 0 \implies \sum_N^\infty a_n$ div.

■

M₅ $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ elég, ha végtelen sok n-re igaz. Nem kell, hogy $\forall\ n > N$-re teljesüljön. Ekkor már $\exists\ a_{n_r} \not\to 0$ részsorozat.

Ez a tétel is kimondható limeszes alakban:

T₂*

Ha $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = c$ és
$c < 1 \implies \sum^\infty a_n$ konvergens.
$c > 1$ vagy $c = \infty \implies \sum^\infty a_n$ divergens.

B Hasonló a hányados kritériumnál látotthoz.

M₆ $c = 1$, tehát $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ esetén nem használható a gyökkritérium. Az alábbi két példa igazolja állításunk helyességét.

Pl. $\sum^\infty \frac{1}{n}$ divergens és

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$$

Pl. $\sum^\infty \frac{1}{n^2}$ konvergens és

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} = 1$$

Bebizonyítható az alábbi állítás is:

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Ha } a_n > 0,\ n > N \ \text{ és } \ \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} < 1 & \Longrightarrow \ \sum\limits^{\infty} a_n \text{ konv.} \\ \text{Ha } a_n > 0,\ n > N \ \text{ és } \ \overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} > 1 & \Longrightarrow \ \sum\limits^{\infty} a_n \text{ div.} \end{array}}$$

M_6 A második állítás könnyen bizonyítható, hiszen $\overline{\lim} \sqrt[n]{a_n} > 1$-ből következik a divergencia, mivel végtelen sok n-re:

$$\sqrt[n]{a_n} > 1 \quad \Longrightarrow \quad a_n > 1\ ; \quad \text{tehát } \exists\ a_{n_r} \not\to 0 \ \text{ részsorozat.}$$

Pl. Konvergens-e az alábbi sor?

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n^2 + 2}{2n^2 + 5} \right)^{2n^3}}$$

A feladatot a T_2^* tétellel (gyökkritériummal) oldjuk meg.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2+2}{2n^2+5} \right)^{2n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1 + \dfrac{2}{2n^2}\right)^{2n^2}}{\left(1 + \dfrac{5}{2n^2}\right)^{2n^2}} = \frac{e^2}{e^5} = \frac{1}{e^3} < 1$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens.}$$

5.4.1. Feladatok

Vizsgálja meg az alábbi sorokat konvergencia szempontjából!

1. $\sum_{1}^{\infty} \frac{3^n}{n^2\ 7^n}$

2. $\sum_{1}^{\infty} \frac{n^2\ 3^n}{7^{n+1}}$

3. $\sum_{1}^{\infty} \frac{n^6}{2^{n+3}}$

4. $\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{n+5}\right)^{n^2}$

5. $\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{3n+1}{3n+3}\right)^{n^2+2n}$

6. $\sum_{1}^{\infty} \frac{2^n}{4n+1}$

7. $\sum_{1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{4^{2n+1}\ (3n+1)}$

8. $\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{n}{n-2}\right)^{n^2} \frac{1}{4^n}$

További kidolgozott példák

Pl. $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{n^4\ 8^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Ezt a feladatot legegyszerűbben a majoráns kritérimmal oldhatjuk meg.

$$a_n < \frac{8^n}{n^4\ 8^n} = \frac{1}{n^4}\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \text{ konvergens } (\alpha = 4 > 1) \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens}$$

A hányados kritérium, illetve a gyökkritérium is használható lenne.

Pl. $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4\ 7^n}{8^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Ennek a feladatnak a megoldása már a majoráns kritérummal elég nehézkes lenne. A hányados kritérim alkalmazható, de itt a gyökkritérium alkalmazása a legjobb választás.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^4\ 7}{8} = \frac{7}{8} < 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergens.}$$

Pl. $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{(2n+1)\ 5^n}} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

Most viszont a hányados kritérium alkalmazása a legcélszerűbb. (A gyökkritérium alkalmazásánál a rendőrelvre is szükségünk lenne az $\sqrt[n]{2n+1}$ sorozat határértékének bizonyításához.)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+2} \quad (2n+1) \quad 5^n}{(2n+3) \; 5^{n+1} \quad 3^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{5} \quad \frac{2n+1}{2n+3} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{3}{5} \quad \frac{2+\frac{1}{n}}{2+\frac{3}{n}} = \frac{3}{5} < 1 \quad \Longrightarrow \quad \sum^{\infty} a_n \text{ konvergens.}$$

Pl. $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)! \; 2^n}{3^{2n}}} = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)! \; \left(\frac{2}{9}\right)^n$

Itt is a hányados kritériumot alkalmazzuk:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+2)! \; \left(\frac{2}{9}\right)^{n+1}}{(n+1)! \; \left(\frac{2}{9}\right)^{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{9} \; (n+2) = \infty > 1$$

$$\Longrightarrow \quad \sum^{\infty} a_n \text{ divergens.}$$

Pl. $\boxed{\text{Abszolút vagy feltételesen konvergens-e} \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{5\,n^2+3} \text{ sor?}}$

Nem abszolút konvergens, mert

$$|a_n| = \frac{n}{5n^2+3} \geq \frac{n}{5n^2+3n^2} = \frac{1}{8n}$$

és $\frac{1}{8} \sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergens, tehát $\sum\limits_{n=2}^{\infty} |a_n|$ divergens (a minoráns kritérium miatt).

Viszont $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ konvergens, mert Leibniz típusú. Ugyanis

$|a_n| = \dfrac{n}{5n^2+3} \searrow 0$, mert

$$|a_n| = \underbrace{\frac{n}{n^2}}_{=\frac{1}{n}} \; \frac{1}{5+\frac{3}{n^2}} \to 0 \cdot \frac{1}{5} = 0$$

És

$$\begin{array}{rcl}
|a_{n+1}| = \dfrac{n+1}{5(n+1)^2+3} & < & \dfrac{n}{5n^2+3} = |a_n| \\
 & \Uparrow & \\
(n+1)(5n^2+3) & < & n\,(5n^2+10n+8) \\
 & \Uparrow & \\
5n^3+5n^2+3n+3 & < & 5n^3+10n^2+8n \\
 & \Uparrow & \\
0 & < & 5n^2+5n-3\,, \quad \text{ha } \; n \geq 2
\end{array}$$

Vagyis a sor feltételesen konvergens.

(Majd folytatjuk.)

5.5. Integrálkritérium

T Legyen f pozitív értékű <u>monoton csökkenő</u> függvény $[1,\infty)$-en és $f(k) = a_k > 0$

1. Ha $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ konvergens $\Longrightarrow$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergens
2. Ha $\int\limits_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ divergens $\Longrightarrow$ $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ divergens

M $\Longleftrightarrow$ állítás is igaz, tehát a sor és az improprius integrál egyidejűleg konvergens, illetve divergens.

B

1. Mivel

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_n \leq \underbrace{\int\limits_1^n f(x)\,\mathrm{d}x}_{\text{monoton növő függvénye } n\text{-nek}} \leq$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \int\limits_1^n f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}\,,$$

$$a_k > 0 \;\text{ és }\; \sum_2^n a_k \;\text{ korlátos} \;\Longrightarrow\; \sum_2^{\infty} a_k \;\text{ konvergens} \;\Longrightarrow\; \sum_1^{\infty} a_k \;\text{ konvergens}$$

2. $\displaystyle\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x \le a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} = s_{n-1}$

Mivel $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x = \infty \quad\Longrightarrow\quad \lim_{n\to\infty} s_{n-1} = \infty$, tehát a sor divergens.

■

5.6. Hibabecslés pozitív tagú sorösszegek közelítése esetén

1. Ha a sor konvergenciája integrálkritériummal állapítható meg, akkor az s sorösszeg s_n részletösszeggel való közelítésének hibáját is egy integrállal becsülhetjük.

   (T) Ha az integrálkritérium 1. állításának feltételei teljesülnek, akkor az $s \approx s_n$ közelítésnél elkövetett hiba

   $$0 < H = r_n = a_{n+1} + a_{n+2} \cdots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \le \int_n^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

   (B) Mivel

   $$a_{n+1} + a_{n+2} \cdots + a_m \le \int_n^m f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

   ezért

   $$H = r_n = \lim_{m\to\infty}\sum_{k=n+1}^{m} a_k \le \lim_{m\to\infty}\int_n^m f(x)\,\mathrm{d}x = \int_n^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

   ■

2. Ha a sor konvergenciájára hányados vagy gyökkritériummal következtettünk, akkor a sorhoz található konvergens majoráló geometriai sor. A majoráló sor r_n^* maradékösszegével becsülhetjük az eredeti sor r_n maradékösszegét.
   (L. előadás és gyakorlat!)

6. Műveletek konvergens sorokkal

T Ha $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S_a$ és $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = S_b$, $S_a, S_b \in \mathbb{R}$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = S_a + S_b \quad \text{és} \quad \sum_{k=1}^{\infty} (c \cdot a_k) = c \cdot S_a\,.$$

B

$$S_a = \lim_{n\to\infty} s_n^a = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$S_b = \lim_{n\to\infty} s_n^b = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} b_k$$

$$S_{a+b} = \lim_{n\to\infty} s_n^{a+b} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k \right) =$$
$$\lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right) + \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k \right) = S_a + S_b$$

Másrészt

$$S_{c\,a} = \lim_{n\to\infty} s_n^{c\,a} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} (c\,a_k) = c \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = c\,S_a$$

6.1. Végtelen sorok természetes szorzata

$$\begin{array}{c|cccccccccccc}
 & a_1 & + & a_2 & + & a_3 & + & a_4 & + & \cdots & + & a_k & + \cdots \\
\hline
b_1 & b_1a_1 & + & b_1a_2 & + & b_1a_3 & + & b_1a_4 & + & \cdots & + & b_1a_k & + \cdots \\
+ & & & & & & & & & & & & \\
b_2 & b_2a_1 & + & b_2a_2 & + & b_2a_3 & + & b_2a_4 & + & \cdots & + & b_2a_k & + \cdots \\
+ & & & & & & & & & & & & \\
b_3 & b_3a_1 & + & b_3a_2 & + & b_3a_3 & + & b_3a_4 & + & \cdots & + & b_3a_k & + \cdots \\
+ & & & & & & & & & & & & \\
b_4 & b_4a_1 & + & b_4a_2 & + & b_4a_3 & + & b_4a_4 & + & \cdots & + & b_4a_k & + \cdots \\
+ & & & & & & & & & & & & \\
\vdots & \vdots & & & & & & & & & & & \\
+ & & & & & & & & & & & & \\
b_k & b_ka_1 & + & b_ka_2 & + & b_ka_3 & + & b_ka_4 & + & \cdots & + & b_ka_k & + \cdots \\
+ & & & & & & & & & & & & \\
\vdots & \vdots & & & & & & & & & & &
\end{array}$$

A természetes szorzat elemei:

$$t_1 = b_1a_1, \quad t_2 = b_2a_1 + b_2a_2 + b_1a_2, \quad t_3 = b_3a_1 + b_3a_2 + b_3a_3 + b_2a_3 + b_1a_3, \ldots$$

A természetes szorzat:

$$\sum_{k=1}^{\infty} t_k \,, \qquad \text{ahol} \qquad \sum_{k=1}^{n} t_k = \sum_{k=1}^{n} a_k \sum_{k=1}^{n} b_k.$$

Ⓣ Ha $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S_a$ és $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k = S_b$, akkor a $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ és $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ sorok természetes szorzata konvergens, és

$$\sum_{k=1}^{\infty} t_k = \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k\right) = S_a\, S_b.$$

(Bizonyítás az előzőek alapján nyilvánvaló.)

6.2. Végetelen sorok Cauchy-szorzata

$$\begin{array}{c|ccccccccccccc}
 & a_1 & + & a_2 & + & a_3 & + & a_4 & + & \cdots & + & a_k & + & \cdots \\
\hline
b_1 & b_1a_1 & & b_1a_2 & & b_1a_3 & & b_1a_4 & & \cdots & & b_1a_k & & \cdots \\
+ & & & & & & & & & & & & & \\
b_2 & b_2a_1 & & b_2a_2 & & b_2a_3 & & b_2a_4 & & \cdots & & b_2a_k & & \cdots \\
+ & & & & & & & & & & & & & \\
b_3 & b_3a_1 & & b_3a_2 & & b_3a_3 & & b_3a_4 & & \cdots & & b_3a_k & & \cdots \\
+ & & & & & & & & & & & & & \\
b_4 & b_4a_1 & & b_4a_2 & & b_4a_3 & & b_4a_4 & & \cdots & & b_4a_k & & \cdots \\
+ & & & & & & & & & & & & & \\
\vdots & \vdots & & & & & & & & & & & & \\
+ & & & & & & & & & & & & & \\
b_k & b_ka_1 & & b_ka_2 & & b_ka_3 & & b_ka_4 & & \cdots & & b_ka_k & & \cdots \\
+ & & & & & & & & & & & & & \\
\vdots & \vdots & & & & & & & & & & & &
\end{array}$$

A Cauchy-szorzat elemei:

$c_1 = b_1a_1,$

$c_2 = b_1a_2 + b_2a_1,$

$c_3 = b_1a_3 + b_2a_2 + b_3a_1,$

$\cdots,$

$c_n = b_1a_n + b_2a_{n-1} + b_3a_{n-2} + \cdots + b_na_1$ (indexek összege $n+1$).

A Cauchy-szorzat:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \,, \quad \text{ahol} \quad c_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \, a_{n-k+1} \,.$$

(T) Ha $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ és $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ abszolút konvergens sorok és $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S_a \,, \ \sum_{k=1}^{\infty} b_k = S_b \,,$ akkor a $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ és $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ Cauchy-szorzata is abszolút konvergens, és

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = S_a \, S_b \,, \quad \text{ahol} \quad c_n = \sum_{k=1}^{n} b_k \, a_{n-k+1} \,.$$

(¬B)

(Pl.) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^k + \cdots = \frac{1}{1-x} \,,$ ha $|x| < 1.$

$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \, x^k = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^k \, x^k + \cdots = \frac{1}{1+x} \,,$ ha $|x| < 1 \,.$

Írjuk fel a fenti két sor Cauchy-szorzatát!

$$\begin{array}{c|ccccccccccccc}
 & 1 & + & x & + & x^2 & + & x^3 & + & \cdots & + & x^k & + & \cdots \\
\hline
1 & 1 & & x & & x^2 & & x^3 & & \cdots & & x^k & & \cdots \\
+ & & & & & & & & & & & & & \\
-x & -x & & -x^2 & & -x^3 & & -x^4 & & \cdots & & -x^{k+1} & & \cdots \\
+ & & & & & & & & & & & & & \\
x^2 & x^2 & & x^3 & & x^4 & & x^5 & & \cdots & & x^{k+2} & & \cdots \\
+ & & & & & & & & & & & & & \\
-x^3 & -x^3 & & -x^4 & & -x^5 & & -x^6 & & \cdots & & -x^{k+3} & & \cdots \\
+ & & & & & & & & & & & & & \\
\vdots & \vdots & & & & & & & & & & & & \\
+ & & & & & & & & & & & & & \\
(-1)^k x^k & \cdots & & & & & & & & & & & & \\
+ & & & & & & & & & & & & & \\
\vdots & \vdots & & & & & & & & & & & &
\end{array}$$

Cauchy-szorzat:

$$1+0+x^2+0+x^4+0+x^6+\cdots = 1+x^2+x^4+x^6+\cdots+x^{2k}+\cdots = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1+x} \,,$$

ha $|x| < 1 \,.$

Házi feladat:

Határozzuk meg a $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = \mathrm{e}^x$ és $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{k!} = \mathrm{e}^y$ sorok Cauchy-szorzatát!

(Megjegyzés: $\mathrm{e}^x \cdot \mathrm{e}^y = \mathrm{e}^{x+y} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!}$ eredményt kell kapni.)

6.3. Zárójelek elhelyezése illetve elhagyása végtelen sor esetén

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + \cdots$$

A fenti sor részletösszegei:
$s_1 = a_1,\ s_2 = a_1+a_2,\ s_3 = a_1+a_2+a_3,\ s_4 = a_1+a_2+a_3+a_4,\ s_5 = a_1+a_2+a_3+a_4+a_5, \ldots$ stb. Az

$$a_1 + a_2 + (\underbrace{a_3 + a_4 + a_5}_{a_3^*}) + a_6 + \cdots$$

bezárójelezett új sor részletösszegei

$$s_1^* = a_1,\ s_2^* = a_1 + a_2,\ s_3^* = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5,\ s_4^* = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6,\ \ldots$$

Zárójelek elhelyezése esetén a részletösszegek sorozata szűkül. Ha a sor konvergens volt, akkor zárójelek behelyezése esetén is konvergens marad. Előfordulhat, hogy divergens sorból – zárójelek elhelyezése után – konvergens sor lesz.

Pl. $(1-1) + (1-1) + (1-1) + (1 - \cdots.$

Véges sok zárójel elhelyezése nem befolyásolja a konvergenciát!

Zárójelek elhagyása után a részletösszegek sorozata bővül. Ha a sor divergens volt, akkor zárójelek elhagyása esetén is divergens marad. Előfordulhat, hogy konvergens sorból – zárójelek elhagyása után – divergens sor lesz. Véges sok zárójel elhagyása nem befolyásolja a konvergenciát!

6.4. Végtelen sor elemeinek felcserélése (átrendezése)

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \cdots + a_k + \cdots$$

$$a_1 + a_3 + a_2 + a_{100} + a_5 + a_6 + \cdots + a_{99} + a_4 + a_{101} + \cdots$$

Véges sok elem felcserélése nem változtatja meg a konvergencia vagy divergencia tényét, nem változik meg a sorösszeg sem. Végtelen sok elemcsere megváltoztathatja a sorösszeget, feltételesen konvergens sor átrendezhető akár divergenssé is.

Ⓣ Ha $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergens és $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ divergens, akkor $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ átrendezhető úgy, hogy divergens legyen, és átrendezhető úgy is, hogy egy előre tetszőlegesen megadott szám legyen az összege. (Nem bizonyítjuk.)

Ⓣ Ha $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ abszolút konvergens, akkor tetszőleges átrendezése is abszolút konvergens, az átrendezés nem változtatja meg a sorösszeget. (Nem bizonyítjuk.)

7. Feladatok sorokhoz

1. a) $\displaystyle\sum_{2}^{\infty} \frac{3^{k+1}+2^{2k+1}}{5^k} = ?$

   b) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{2}{n(n+2)} = ?$

   c) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n+1}}} = ?$

2. Konvergensek-e az alábbi sorok?

   a) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt[3]{n}+\sqrt[4]{n}}$

   b) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n n^3+1}{n^5+1}$

   c) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2+5}}$

   d) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{5^n}{(2n+3)!}$

   e) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{3n+1}$

   f) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{3^n}{n\,4^{n+1}}$

   g) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n+2^n}$

   h) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{2n+1}{2^n+n}$

   i) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}$

   j) $\displaystyle\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$

   k) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{n^3}{7^{3n+2}}$

   l) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{2^n\cdot n}{(3n)!}$

m) $\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n+3}\right)^{n}$

n) $\sum_{1}^{\infty} \frac{3^n + 4^n}{5^n + 6^n}$

o) $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{2n+1}$

p) $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+5}$

q) $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^3+5}$

r) $\sum_{10}^{\infty} \frac{\frac{1}{n}}{n - \sqrt{n^2 - \sqrt{n} + 3}}$

s) $\sum_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{\sqrt{5}}{3n}\right)^{n}$

t) $\sum_{1}^{\infty} \frac{10^n}{n!\, n^2}$

u) $\sum_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{n}\right)^{n^2+n}$

v) $\sum_{1}^{\infty} \frac{n^3}{\left(4 + \frac{2}{n^2}\right)^n}$

w) $\sum_{1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

x) $\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{n^2}$

y) $\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{n}{n^2+1}\right)^{n^2}$

z) $\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n^2} \frac{1}{2^n}$

3. Határozzuk meg az alábbi sorok értékét 10^{-3}-nál kisebb hibával!

a) $\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{2n^2+1}\right)^{n}$

b) $\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{(2n)! - n!}$

c) $\sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{2^n + 10^n}$

d) $\sum_{1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n \cdot 2^n + 5}$

e) $\sum_{1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$

f) $\sum_{1}^{\infty} \frac{n!\, 3^n}{(2n)!}$

4. Mekkora hibát követünk el, ha a sorösszeget 10. részletösszegével közelítjük?

$(s \approx s_{10}; \quad H = r_{10} = \sum_{k=11}^{\infty} a_k; \quad |H| \leq ?)$

a) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n! + \sqrt{2}}$

b) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 3^n}$

c) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3n+1}\right)^n$

d) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{n!}{(2n)!}$

e) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{3^n}{2^{2n} + n^2 + 3}$

f) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n\,(n-1)}{n^2 + n}$

5. Abszolút illetve feltételesen konvergens-e az alábbi sor?

a) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} (-1)^n\,\frac{n+4}{n^2+4}$

b) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\,\log_2 n^2}$

c) $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n^2 - 3n + 8}$

d) $1 - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2^2} - \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{3^2} - \dfrac{1}{3^3} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} - \dfrac{1}{3^n} + \cdots$

e) $\dfrac{1}{\sqrt{1}} - \dfrac{1}{1^2} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{n^2} + \cdots$

f) $-1 + \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{2^2} - \dfrac{1}{3!} + \dfrac{1}{2^3} - \cdots - \dfrac{1}{n!} + \dfrac{1}{2^n} - \cdots$

g) $1 - \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^3} - \cdots + \dfrac{1}{(2n-1)^3} - \dfrac{1}{(2n)^2} + \cdots$

h) $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2^2} + \cdots + \dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2^n} + \cdots$

8. Számsorozatok nagyságrendje

(D) $a_n = O(b_n)$ („nagy ordó b_n”), ha $\exists\ c_1$:
$|a_n| \le c_1 |b_n|, \quad n > N$ (legfeljebb véges sok kivétellel)

(D) $a_n = \Omega(b_n)$ („omega b_n”), ha $b_n = O(a_n)$.

Vagyis $|b_n| \le c_1|a_n| \quad n > N \quad (\exists\ c_1)$.
Ekkor: $c_2|b_n| = \dfrac{1}{c_1}|b_n| \le |a_n|$, vagyis most $|a_n|$ alulról becsülhető $|b_n|$ segítségével.

(D) $a_n = \Theta(b_n)$ („teta b_n”), ha $a_n = O(b_n)$ és $a_n = \Omega(b_n)$.

Az előzőből következik:

(T) $a_n = \Theta(b_n) \iff c_2|b_n| \le |a_n| \le c_1|b_n|$

(Pl.) $a_n = 2n^2 - n + 3$

1. $a_n = O(n^2)$, mert $2n^2 - n + 3 \le 2 \cdot n^2$, ha $n \ge 3$. Persze $a_n = O(n^3)$ is igaz, sőt általánosságban: $a_n = O(n^{2+\alpha}), \quad \alpha \ge 0$.
2. $a_n = \Omega(n^2)$, mert $1 \cdot n^2 = 2n^2 - n^2 \le 2n^2 - n + 3$. Sőt $a_n = \Omega(n^{2-\alpha}), \quad \alpha \ge 0$.
3. Tehát $a_n = \Theta(n^2)$.

8.1. Műveletek Θ-val

(T) $a_n, b_n, c_n, d_n > 0$

$$\left.\begin{aligned} a_n &= \Theta(c_n) \\ b_n &= \Theta(d_n) \end{aligned}\right\} \implies \begin{cases} 1. \quad a_n \cdot b_n = \Theta(c_n \cdot d_n) \\ 2. \quad \dfrac{a_n}{b_n} = \Theta\left(\dfrac{c_n}{d_n}\right) \\ 3. \quad a_n + b_n = \Theta(c_n + d_n) \end{cases}$$

Különbségre nem igaz!

Megj.: Akkor van értelme használni ezt, ha c_n és d_n sokkal „egyszerűbb” sorozatok.

(B)

$$0 < \alpha_1 c_n \le a_n \le \alpha_2 c_n, \quad \text{mert } a_n = \Theta(c_n)$$
$$0 < \beta_1 d_n \le b_n \le \beta_2 d_n, \quad \text{mert } b_n = \Theta(d_n)$$

1. Azonos értelmű egyenlőtlenségek összeszorozhatók:

$$(\alpha_1\beta_1)c_nd_n \le a_nb_n \le (\alpha_2\beta_2)c_nd_n \quad \Longrightarrow \quad a_nb_n = \Theta(c_nd_n)$$

2.
$$\left.\begin{aligned} &0 < \alpha_1 c_n \le \alpha_n \le \alpha_2 c_n \\ &0 < \frac{1}{\beta_2}\frac{1}{d_n} \le \frac{1}{b_n} \le \frac{1}{\beta_1}\frac{1}{d_n} \end{aligned}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{\alpha_1}{\beta_1}\right)\frac{c_n}{d_n} \le \frac{a_n}{b_n} \le \left(\frac{\alpha_2}{\beta_1}\right)\frac{c_n}{d_n},$$

tehát $\dfrac{a_n}{b_n} = \Theta\left(\dfrac{c_n}{d_n}\right)$

3.
$$\alpha(c_n + d_n) \le \alpha_1 c_n + \beta_1 d_n \le a_n + b_n \le \alpha_2 c_n + \beta_2 d_n \le \beta(c_n + d_n)$$

$$\alpha = \min\{\alpha_1, \beta_1\}, \quad \beta = \max\{\alpha_2, \beta_2\}$$

$\Longrightarrow a_n + b_n = \Theta(c_n + d_n)$

■

Pl. $a_n = \sqrt{2n^2+3n+1} - \sqrt{n^2-n+1} = \dfrac{n^2+4n}{\sqrt{2n^2+3n+1}+\sqrt{n^2-n+1}} =$

$$= \frac{\Theta(n^2)}{\Theta(n)+\Theta(n)} = \frac{\Theta(n^2)}{\Theta(n+n)} = \frac{\Theta(n^2)}{\Theta(n)} = \Theta\left(\frac{n^2}{n}\right) = \Theta(n) \quad \Longrightarrow \quad a_n \to \infty$$

Pl. $a_n = \sqrt{7n^2-2n+10} - \sqrt{7n^2-2n+3} = \dfrac{10-3}{\sqrt{7n^2-2n+10}+\sqrt{7n^2-2n+3}} =$

$$= \frac{\Theta(1)}{\Theta(n+n)} = \Theta\left(\frac{1}{n}\right) \quad \Longrightarrow \quad a_n \to 0$$

8.2. $a_n \sim b_n$

D
a_n aszimptotikusan egyenlő b_n-nel, jelben $a_n \sim b_n$, ha $$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$$

Pl. $\sin\dfrac{1}{n} \sim \dfrac{1}{n}$, mert $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$

Pl. $n! \sim \left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}$ **Stirling formula** ($\neg$B)

(T) $a_n, b_n, c_n, d_n > 0$

$$\left.\begin{array}{l} a_n \sim c_n \\ b_n \sim d_n \end{array}\right\} \implies \left\{\begin{array}{ll} 1. & a_n + b_n \sim c_n + d_n \\ 2. & a_n b_n \sim c_n d_n \\ 3. & \dfrac{1}{a_n} \sim \dfrac{1}{c_n} \\ 4. & \dfrac{b_n}{a_n} \sim \dfrac{d_n}{c_n} \end{array}\right.$$

Megint nincs különbség!

(B)

$$a_n \sim c_n : \quad \frac{a_n}{c_n} \to 1 \quad \implies \quad 0 < 1 - \varepsilon < \frac{a_n}{c_n} < 1 + \varepsilon, \quad n > N_1$$

$$b_n \sim d_n : \quad \frac{b_n}{d_n} \to 1 \quad \implies \quad 0 < 1 - \varepsilon < \frac{b_n}{d_n} < 1 + \varepsilon, \quad n > N_2$$

Legyen $n > \max\{N_1, N_2\} = N$

1. $1 - \varepsilon = \dfrac{(1-\varepsilon)c_n + (1-\varepsilon)d_n}{c_n + d_n} < \dfrac{a_n + b_n}{c_n + d_n} < \dfrac{(1+\varepsilon)c_n + (1+\varepsilon)d_n}{c_n + d_n} = 1 + \varepsilon\,,$ ha $n > N$

2. $\neg$B

3. $\dfrac{\frac{1}{a_n}}{\frac{1}{c_n}} = \dfrac{c_n}{a_n} = \dfrac{1}{\frac{a_n}{c_n}} \to 1$

4. Az előző kettőből következik: $a_n \sim c_n \quad \implies \quad \dfrac{1}{a_n} \sim \dfrac{1}{c_n}$; másrészt $b_n \sim d_n$

$$\implies \quad \frac{b_n}{a_n} \sim \frac{d_n}{c_n}$$

(Pl.) $a_n = \sqrt[3]{2n^2 + n + 1} - \sqrt[3]{2n^2 - 3n - 7} =$

$$= \frac{2n^2 + n + 1 - (2n^2 - 3n - 7)}{\left(\sqrt[3]{2n^2 + n + 1}\right)^2 + \sqrt[3]{2n^2 + n + 1}\sqrt[3]{2n^2 - 3n - 7} + \left(\sqrt[3]{2n^2 - 3n - 7}\right)^2} \sim$$

$$\sim \frac{4n}{\left(\sqrt[3]{2}\, n^{\frac{2}{3}}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{2}\, n^{\frac{2}{3}}\right)^2 + \left(\sqrt[3]{2}\, n^{\frac{2}{3}}\right)^2} = \frac{4n}{\sqrt[3]{4} \cdot 3\, n^{\frac{4}{3}}} = \frac{4}{3\sqrt[3]{4}\,\sqrt[3]{n}} \quad \implies \quad a_n \to 0$$

(Pl.) $a_n = \dfrac{\operatorname{arctg} \sqrt{n}}{\sqrt[3]{2n^2 + n + 1} - \sqrt[3]{2n^2 - 3n - 7}} \sim \dfrac{\frac{\pi}{2}}{\frac{4}{3\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{n}}} = \text{konst} \cdot \sqrt[3]{n} \to \infty$

Pl. $\dfrac{(n!)^2}{(2n)!} \sim \dfrac{\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^{2n} 2\pi n}{\left(\dfrac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n} \sqrt{2\pi \cdot 2n}} = \dfrac{\sqrt{\pi}\sqrt{n}}{4^n} \to 0$

Pl. Az előző példa felhasználásával:

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!n!} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi}\sqrt{n}} \qquad \left(= \Theta\left(\frac{4^n}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

M $a_n \sim b_n \quad \not\Longrightarrow \quad (a_n)^n \sim (b_n)^n \qquad$ Pl. $\underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{1 + \dfrac{1}{n}} \sim \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\sqrt[n]{2}}$, de $\underset{\substack{\downarrow \\ \mathrm{e}}}{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n} \not\sim 2$

Persze $a_n \sim b_n$ esetén $a_n^k \sim b_n^k, k \in \mathbb{N}^+$ már igaz $(k \neq f(n))$. (k valós is lehet)

$$\left(\frac{a_n}{b_n} \to 1 \quad \Longrightarrow \quad \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^k \to 1 \right)$$

És igaz a következő tétel is:

T $\boxed{a_n, b_n > 0 \qquad a_n \sim b_n \quad \Longrightarrow \quad \sqrt[n]{a_n} \sim \sqrt[n]{b_n}}$

B $a_n \sim b_n \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{a_n}{b_n} \to 1 \quad \Longrightarrow \quad 0 < 1 - \varepsilon < \dfrac{a_n}{b_n} < 1 + \varepsilon, \quad n > N(\varepsilon)$

$$\Longrightarrow \quad \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\sqrt[n]{1-\varepsilon}} < \sqrt[n]{\frac{a_n}{b_n}} < \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\sqrt[n]{1+\varepsilon}} \quad \Longrightarrow \quad \sqrt[n]{\frac{a_n}{b_n}} \to 1$$

■

Pl. $\sqrt[n]{\dfrac{3n^2 - n\sqrt{n} + 6}{2n^2 + 3n + 7}} \sim \sqrt[n]{\dfrac{3}{2}} \sim 1$

Pl. $\boxed{\text{Határozza meg } A \text{ és } \alpha \text{ értékét úgy, hogy } \cos\dfrac{1}{n} - 1 \sim An^\alpha \text{ teljesüljön!}}$

1. megoldás:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\cos\frac{1}{n}-1}{An^\alpha}=1 \quad\Longrightarrow\quad \lim_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{1}{n}-1}{n^\alpha}=A\neq 0$$

$$\left.\begin{array}{l}\alpha=0\text{-ra } A=0 \text{ lenne}\\ \alpha>0\text{-ra } \frac{0}{\infty}\to 0=A \text{ lenne}\end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \alpha<0$$

$$u:=\frac{1}{n} \xrightarrow[\infty]{n\downarrow} 0$$

$$\lim_{u\to+0} \underbrace{\frac{\cos u-1}{u^{-\alpha}}}_{\frac{0}{0}\text{ alakú } (-\alpha>0)} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{u\to+0}\frac{-\sin u}{-\alpha u^{-\alpha-1}}=\lim_{u\to+0}\frac{\sin u}{u^{-\alpha-1}}\cdot\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\alpha}=A$$

ha $-\alpha-1=1 \quad\Longrightarrow\quad \alpha=-2, A=-\dfrac{1}{2}.$

Tehát $\cos\dfrac{1}{n}-1\sim-\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{n^2}$

2. megoldás:

$\cos x-1=-2\sin^2\dfrac{x}{2}$ azonosság segítségével: $\dfrac{\cos\frac{1}{n}-1}{An^\alpha}=\dfrac{-2\sin^2\frac{1}{2n}}{An^\alpha}\to 1$, ha

$An^\alpha=-2\left(\dfrac{1}{2n}\right)^2\to A=-\dfrac{1}{2}, \alpha=-2$

Feladat:

Határozza meg A és α értékét úgy, hogy $\sin\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n}\sim An^\alpha$ fennálljon!

T

$$\boxed{\begin{array}{l} a_n>0, b_n>0\\ a_n\sim b_n \quad\Longrightarrow\quad \sum^\infty a_n \text{ és } \sum^\infty b_n \text{ egyidejűleg konvergens, illetve divergens}\\ (\text{Jelben: } \sum^\infty a_n\sim\sum^\infty b_n)\end{array}}$$

B $a_n\sim b_n \quad\Longrightarrow\quad \dfrac{a_n}{b_n}\to 1 \quad\Longrightarrow\quad 1-\varepsilon<\dfrac{a_n}{b_n}<1+\varepsilon$. Legyen $\varepsilon<1$.

Tehát $c_1b_n<a_n<c_2b_n \quad (c_1=1-\varepsilon>0, \quad c_2=1+\varepsilon)$

Ha $\sum^\infty a_n$ konvergens, akkor $b_n<\dfrac{1}{c_1}a_n$ miatt $\sum^\infty b_n$ is konvergens (majoráns kritérium)

Ha $\sum^\infty a_n$ divergens, akkor $\dfrac{1}{c_2}a_n<b_n$ miatt $\sum^\infty b_n$ is divergens (minoráns kritérium)

Ha $\sum^{\infty} b_n$ konvergens, akkor $a_n < c_2 b_n$ miatt $\sum^{\infty} a_n$ is konvergens (majoráns kritérium)
Ha $\sum^{\infty} b_n$ divergens, akkor $c_1 b_n < a_n$ miatt $\sum^{\infty} a_n$ is divergens (minoráns kritérium)

■

Pl. $\sum^{\infty} \frac{1}{3n^2 - 2\sqrt{n} + 8} = \sum^{\infty} a_n$

$$a_n \sim \frac{1}{3n^2} = b_n \quad \text{és} \quad \sum^{\infty} b_n \text{ konvergens} \quad \Longrightarrow \quad \sum^{\infty} a_n \text{ konvergens}$$

Pl. $\sum^{\infty} \frac{1}{7n + \sqrt[3]{n} - 1} = \sum^{\infty} a_n$

$$a_n \sim \frac{1}{7n} = b_n \quad \text{és} \quad \sum^{\infty} b_n \text{ divergens} \quad \Longrightarrow \quad \sum^{\infty} a_n \text{ divergens}$$

Pl. $\sum^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{n} = \sum^{\infty} a_n$

$$a_n \sim \frac{1}{n} = b_n \quad \text{és} \quad \sum^{\infty} b_n \text{ divergens} \quad \Longrightarrow \quad \sum^{\infty} a_n \text{ divergens}$$

Pl. $\sum^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right) = \sum^{\infty} a_n$

$$a_n = 2\sin^2 \frac{1}{2n} \sim 2\frac{1}{4n^2} = \frac{1}{2n^2} = b_n \quad \text{és} \quad \sum^{\infty} b_n \text{ konvergens} \Longrightarrow \sum^{\infty} a_n \text{ konvergens}$$

Feladatok:
Konvergensek-e az alábbi sorok?

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \operatorname{arctg} \frac{1}{n}\right)$

2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\operatorname{ch} \frac{2}{n} - \cos \frac{3}{n}\right)$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\binom{3n}{n}}$

(D) $\boxed{\begin{array}{l} a_n = o(b_n) \;\; (\text{„kis ordó } b_n\text{”}), \text{ ha } \forall\, c > 0\text{-ra} \\ \qquad\qquad |a_n| \le c|b_n| \quad n > N\text{-re} \end{array}}$

Más jelölés is használatos:

$$a_n \ll b_n, \text{ ha } a_n = o(b_n)$$

(Nagyságrendileg kisebb vagy lényegesen kisebb.)

A definíció következménye, hogy $b_n \neq 0$ esetén $\left|\dfrac{a_n}{b_n}\right| \le c, \quad n > N \quad \forall\, c > 0$-ra. Ebből persze már következik, hogy ekkor $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, N_0(\varepsilon)$, hogy $\left|\dfrac{a_n}{b_n}\right| < \varepsilon$, ha $n > N_0(\varepsilon)$.

Nyilvánvalóan igaz az alábbi állítás is:

(T) $\boxed{a_n = o(b_n), \quad b_n \neq 0 \iff \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 0}$

(Pl.) Mit jelent $a_n = o(1)$?

Mivel $\forall\, c > 0$-ra $|a_n| \le c$, ha $n > N$, ezért $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$

(M) A következő állítás is könnyen bizonyítható lenne:

$$a_n \sim b_n \iff a_n = b_n(1 + o(1)).$$

(Pl.) $n! = o(n^n)$, mert $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$

1. megoldás:

$$0 < \frac{n!}{n^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdots n}{n \cdot n \cdots n} < \frac{1}{n} \qquad + \text{ rendőrelv}$$

2. megoldás:

$$\frac{n!}{n^n} \sim \frac{\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{2\pi n}}{n^n} = \frac{\sqrt{2\pi n}}{\mathrm{e}^n} \to 0$$

Vége!