VIK, Műszaki Informatika

ANALÍZIS (2)

Függvénysorozatok, függvénysorok

Oktatási segédanyag

A Villamosmérnöki és Informatikai Kar
műszaki informatikus hallgatóinak tartott előadásai alapján
összeállította:

Fritz Józsefné

Kónya Ilona

2005. február

Szerkesztette: Győri Sándor

1. Függvénysorozatok

1.1. Konvergencia, határfüggvény

Függvénysorozat:

$$f_0(x), f_1(x), \ldots, f_n(x), \ldots, \qquad\qquad f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,, \qquad n \in \mathbb{N}$$

Jelölése: (f_n) vagy $\langle f_n \rangle$

Értelmezési tartománya: $\quad D = \bigcap\limits_{n=0}^{\infty} D_{f_n}$

Ⓓ $H \subset D$ *konvergenciatartomány:*

$$\forall \quad x_0 \in H\text{-ra} \quad \exists \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x_0)$$

(Pontonkénti konvergencia.)

Ⓓ (f_n) *határfüggvénye:* f

$x_0 \in D_f = H$ és $\qquad \underbrace{f(x_0)}_{A} := \lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{f_n(x_0)}_{a_n}$

Azaz $\forall\, x_0 \in H$-ra tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz $\exists\, N(\varepsilon, x_0)$:

$$(|a_n - A| =) \quad |f_n(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon, \text{ ha } n > N(\varepsilon, x_0)$$

$N(\varepsilon, x_0)$ neve: küszöbindex, küszöbszám.

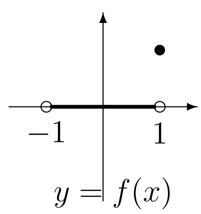
Néhány példa:

Pl. $f_n(x) = x^2 + \dfrac{1}{n} \qquad D = \mathbb{R};\ H = \mathbb{R}; \qquad f(x) = x^2$

Pl. $f_n(x) = \dfrac{1}{n + x^2} \qquad D = \mathbb{R};\ H = \mathbb{R}; \qquad f(x) \equiv 0$

Pl. $f_n(x) = \dfrac{x^2 + n}{2x^2 + 3n} \left(= \dfrac{\frac{x^2}{n} + 1}{\frac{2x^2}{n} + 3} \right) \qquad D = \mathbb{R};\ H = \mathbb{R}; \qquad f(x) \equiv \dfrac{1}{3}$

Pl. $f_n(x) = x^n \qquad D = \mathbb{R}; \qquad H = (-1, 1]$



$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } |x| < 1 \\ 1, & \text{ha } x = 1 \end{cases}$$

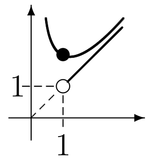
Az egyes függvények folytonosak, de a határfüggvény nem.

$$f(1) = 1 = \lim_{n\to\infty} f_n(1) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to 1-0} f_n(x) \neq \lim_{x\to 1-0} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{x\to 1-0} f(x) = 0$$

Azt is látjuk, hogy a limesz jelek sorrendje itt nem változtatható meg (nem felcserélhetőek).

Pl. $f_n(x) = x + \dfrac{1}{x^n}$ Csak $x > 0$-ra vizsgáljuk.

$$D := (0, \infty) \qquad f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x > 1 \\ 2, & \text{ha } x = 1 \end{cases} \qquad H = [1, \infty)$$



A határfüggvény most sem folytonos, bár az f_n függvények folytonosak voltak. Tehát nem öröklődött ez a tulajdonság a határfüggvényre, vagyis a pontonkénti konvergencia nem elegendő ehhez. (Látni fogjuk, hogy az egyenletes konvergencia esetén már örklődik a folytonosság a határfüggvényre, így ez a függvénysorozat nem egyenletesen konvergens.)

Pl. $f_n(x) = \mathrm{e}^{-nx^2} \left(= (\mathrm{e}^{-x^2})^n \right)$ $D = \mathbb{R};\ H = \mathbb{R};$ $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \neq 0 \\ 1, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$

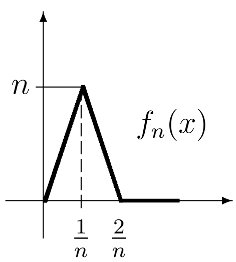
A határfüggvény most sem folytonos.

Pl. $f_n(x) = 1 + x + \cdots + x^{n-1} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k = \begin{cases} \dfrac{x^n - 1}{x - 1}, & \text{ha } x \neq 1 \\ n\,, & \text{ha } x = 1 \end{cases}$

$$D = \mathbb{R}\,; \quad H = (-1, 1) \qquad f(x) = \frac{1}{1-x}, \ \text{ha } x \in (-1, 1)$$

Pl.

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & \text{ha } x \in [0, 1/n) \\ -n^2 x + 2n, & \text{ha } x \in [1/n, 2/n) \\ 0, & \text{ha } x > 2/n \end{cases}$$



$f(x) \equiv 0$, mert

$f_n(0) = 0 \xrightarrow[\infty]{n} 0$

$x > 0: \quad f_n(x) = 0,$ ha $\dfrac{2}{n} \leq x$, vagyis $n \geq \dfrac{2}{x}$

Például $x = \dfrac{1}{10}$-nél $f_n(x) = 0$, ha $n \geq 20$.

Érdekesség:

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n}\cdot n\right) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 \quad \neq \quad \int\limits_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \lim_{n\to\infty} 0\,\mathrm{d}x = 0$$

Későbbiekben látni fogjuk, hogy a konvergencia nem lehetett egyenletes a $[0,1]$ intervallumon (lásd: elégséges feltétel a limesz és az integrál felcserélhetőségére). ($||f_n - f|| = n \not\to 0$)

1.2. Egyenletes konvergencia $(f_n \rightrightarrows f)$

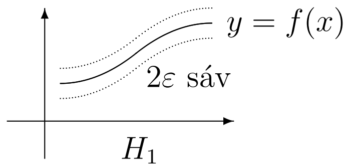
D

> $f_n \rightrightarrows f \quad H_1 \subset H$-n ($H_1$ általában intervallum), ha $\forall\,\varepsilon > 0$-hoz $\exists\, N(\varepsilon)$ (független x-től):
>
> $$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon\,, \qquad \text{ha } n > N(\varepsilon)\,, \qquad x \in H_1$$

Vagyis az adott H_1 halmazon megadható egy közös (univerzális) küszöbindex. Ez több a pontonkénti konvergenciánál, hiszen az egyes pontokban lehet más és más a küszöbszám, nem biztos, hogy olyan küszöbszám is található, amely a H_1 halmaz minden pontjában alkalmas.

Tehát az ábrán bejelölt 2ε sávból f_n nem lép ki, ha $n > N(\varepsilon)$.
Ugyanis a fenti értelmében, ha $n > N(\varepsilon)$:

$$f(x) - \varepsilon \;<\; f_n(x) \;<\; f(x) + \varepsilon\,, \quad \forall\, x \in H_1$$



Pl.

> $$f_n(x) = \frac{2\,x^3\,n^2}{x^2\,n^2\,+\,5}$$
>
> Mutassuk meg, hogy a függvénysorozat egyenletesen konvergens a $(2,5)$ intervallumon!

Megoldás:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{2\,x^3}{x^2\,+\,\dfrac{5}{n^2}} = 2x$$

$$|f_n(x)\,-\,f(x)| \;=\; \left|\frac{2\,x^3\,n^2}{x^2\,n^2\,+\,5}\,-\,2x\right| \;=\; \left|\frac{2\,x^3\,n^2\,-\,2\,x^3\,n^2\,-\,10\,x}{x^2\,n^2\,+\,5}\right| \;=\; \left|\frac{-\,10\,x}{x^2\,n^2\,+\,5}\right| \;=$$

$$= \frac{10\,x}{x^2\,n^2 + 5} \underset{x\in(2,5)}{\leq} \frac{50}{4\,n^2 + 5} < \frac{50}{n^2} < \varepsilon\,, \qquad \text{ha } n > \sqrt{\frac{50}{\varepsilon}}$$

Így az intervallumon közös (x-től független) küszöbindex például: $N(\varepsilon) = \sqrt{\dfrac{50}{\varepsilon}}$

Pl.

> $$f_n(x) = x^n$$
>
> a.) Egyenletesen konvergens-e a függvénysorozat $(0,c]$-ben, ha $0 < c < 1$?
>
> b.) Egyenletesen konvergens-e a függvénysorozat $(0,1)$-ben?

Megoldás:

Legyen $0 < \varepsilon < 1$!

a.) $$|f_n(x) - f(x)| = |x^n - 0| = x^n \leq c^n < \varepsilon,$$

mert $0 < x \leq c < 1$. Innen

$$n > \frac{\ln\varepsilon}{\ln c} = N(\varepsilon) \qquad (\ln c < 0 \text{ volt})$$

Tehát a konvergencia egyenletes a $(0,c]$-ben, hiszen találtunk közös (x-től független) küszöbindexet.

b.) Vizsgáljuk most az egyenletes konvergenciát a $(0,1)$-ben:

$$|f_n(x) - f(x)| = |x^n - 0| = x^n < \varepsilon, \quad \text{ha} \qquad n > \frac{\ln\varepsilon}{\ln x}\,.$$

Mivel $\displaystyle\lim_{x\to 1-0} \frac{\ln\varepsilon}{\ln x} = +\infty,$

azért az 1-hez közeledve egyre nagyobb küszöbindex lehetséges csak, és egyetlen küszöbindex sem jó minden x-ben, tehát a konvergencia nem egyenletes a $(0,1)$ intervallumon.

Tehát bár minden $(0,c] \subset (0,1)$-ben a konvergencia egyenletes, mégsem egyenletes a konvergencia a $(0,1)$ intervallumon!

T Ha $f_n \underset{H_1}{\rightrightarrows} f \quad \Longrightarrow \quad f_n \to f$ pontonként $x \in H_1$-re

Ugyanis $N(\varepsilon)$ megfelel $\forall\, x$-re.

•••

1.3. Uniform norma

$D \subset \mathbb{R}$ legyen adott!

$\mathcal{L} := \{ f : f \text{értelmezett és korlátos } D\text{-n} \}$

$\mathcal{L}$ lineáris tér (vektortér) (L. Bevezetés a számításelméletbe!)

$\mathcal{L}$-ben bevezetünk egy normát.

Ⓓ Az f függvény D halmazra vonatkozó uniform normája:

$$\| f \| := \sup_{x \in D} |f(x)|$$

Házi feladat: Gondolja végig, hogy valóban normát definiáltunk, tehát a fenti definíció eleget tesz a norma alábbi axiómáinak!

a.) $\| f \| \geq 0$ és ($\| f \| = 0 \iff f \equiv 0$)

b.) $\| cf \| = |c| \ \| f \|$

c.) $\| f + g \| \leq \| f \| + \| g \|$

Ⓜ Ha $f \in C^0_{[a,b]}$ és $D = [a, b]$

$$\| f \| = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)| = \max_{x \in [a,b]} |f(x)| \qquad \text{(Weierstrass II.)}$$

●●●

A függvények körében nemcsak az uniform norma, hanem sok más norma is definiálható (lásd például a Fourier soroknál). Ha a norma adott, akkor beszélhetünk az adott normában való konvergenciáról.
Jelölje $\mathcal{L}(\| \ . \ \|)$ a lineáris teret, amelyen definiált a norma és f_n , $f \in \mathcal{L}(\| \ . \ \|)$, $(n \in \mathbb{N})$

Ⓓ (f_n) *normában konvergál* f-hez , ha

$$\lim_{n \to \infty} \| f_n - f \| = 0 \, .$$

Ⓓ (f_n) *a H halmazra vonatkozó uniform normában konvergál* f-hez, ha

$$\lim_{n \to \infty} \| f_n - f \| = \lim_{n \to \infty} \left(\sup_{x \in H} |f_n(x) - f(x)| \right) = 0 \, .$$

Jelben: $f_n \xrightarrow{u} f$; $\overset{u}{\lim_{n \to \infty}} f_n = f$ (H rögzítettnek tekinthető).

Ⓣ $\boxed{H\text{-n:} \qquad f_n \rightrightarrows f \qquad \Longleftrightarrow \qquad f_n \xrightarrow{\mathrm{u}} f}$

(Tehát az egyenletes konvergencia és az uniform normában való konvergencia ekvivalens fogalmak.)

Ⓑ

a.) $\Longrightarrow$:
$\underbrace{|f_n(x) - f(x)|} < \dfrac{\varepsilon}{2}, \quad$ ha $n > N_0\left(\dfrac{\varepsilon}{2}\right), \quad \forall\, x \in H$-ra teljesül, hiszen $f_n \rightrightarrows f$
Mivel korlátos, $\exists$ sup és

$$\sup_{x \in H} |f_n(x) - f(x)| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \text{ ha } n > N_0\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), \text{ tehát } \| f_n - f \| < \varepsilon, \text{ ha } n > N_0\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \| f_n - f \| = 0.$

b.) $\Longleftarrow$:
$\lim\limits_{n\to\infty} \| f_n - f \| = 0$ miatt $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $\exists\, N(\varepsilon)$:

$$\| f_n - f \| < \varepsilon, \text{ ha } n > N(\varepsilon)$$

De ha $x \in H$:

$$0 \le |f_n(x) - f(x)| \le \sup_{x \in H} |f_n(x) - f(x)| = \underbrace{\| f_n - f \| < \varepsilon, \text{ ha } n > N(\varepsilon)}_{\text{Ez a feltétel miatt igaz.}}$$

$\Longrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, ha $n > N(\varepsilon)$, $x \in H$, vagyis $f_n \rightrightarrows f$.

■

●●●

Ⓓ $f_n\ (n \in \mathbb{N}) \in \mathcal{L}(\| \ . \ \|)$ (lineáris normált tér)
Az (f_n) függvénysorozatot ebben a normában *Cauchy sorozat*nak nevezzük (H-n), ha

$$\forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists\, M(\varepsilon) : \qquad \| f_n - f_m \| < \varepsilon, \quad \text{ha } n, m > M(\varepsilon)$$

Ⓣ Ha f_n normában konvergál f-hez az $\mathcal{L}(\| \ . \ \|)$ lineáris normált térben, akkor ebben a normában Cauchy sorozatot alkot.

Ⓑ

$$\| f_n - f_m \| = \| f_n - f + f - f_m \| \le \| f_n - f \| + \| f - f_m \| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon ,$$

$$\text{ha } n, m > N(\frac{\varepsilon}{2}) = M(\varepsilon) \qquad \blacksquare$$

(A bizonyításnál felhasználtuk a háromszög egyenlőtlenséget.)

Ⓣ Ha $f_1 , f_2 , \ldots , f_n , \dots \in \mathcal{L}$, ahol $\mathcal{L}$ az $f : H \mapsto \mathbb{R}$ korlátos függvények tere és (f_n) az uniform normában Cauchy sorozat, akkor $\exists f \in \mathcal{L}$, hogy f_n az uniform normában f-hez konvergál. $(\neg B)$

•••

Ⓟl.

> $$f_n(x) = e^{5x} + \frac{2}{x^4 + n^2 + 3}$$
>
> a.) $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = ?$
>
> b.) $\| f_n - f \| = ?$, ha $x \in D_f$
> Egyenletes-e a konvergencia a konvergenciatartományon?

Megoldás:

a.) $$f(x) = \lim_{n\to\infty} \left(e^{5x} + \frac{2}{x^4 + n^2 + 3} \right) = e^{5x} , \qquad \forall x \in \mathbb{R} = D_f$$

b.) $$\| f_n - f \| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| e^{5x} + \frac{2}{x^4 + n^2 + 3} - e^{5x} \right| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{2}{x^4 + n^2 + 3} = \frac{2}{n^2 + 3}$$

$$\lim_{n\to\infty} \| f_n - f \| = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n^2 + 3} = 0 \implies \text{egyenletes a konvergencia}$$

Ⓟl.

> $$f_n(x) = x + \frac{1}{x^n} , \qquad x > 0$$
>
> a.) $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = ?$
>
> b.) Egyenletes-e a konvergencia a $I_1 = (1, \infty)$ intervallumon?
>
> c.) Egyenletes-e a konvergencia a $I_2 = (2, \infty)$ intervallumon?

Megoldás:

a.) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(x+\dfrac{1}{x^n}\right)=\begin{cases}2\,, & \text{ha } x=1\\ x\,, & \text{ha } x>1\end{cases}$

b.) $\|\, f_n-f\,\|_{I_1}=\sup\limits_{x\in(1,\infty)}\left|x+\dfrac{1}{x^n}-x\right|=\sup\limits_{x\in(1,\infty)}\dfrac{1}{x^n}=1$

$\Longrightarrow\quad \lim\limits_{n\to\infty}\|\, f_n-f\,\|_{I_1}=1\neq 0$

Tehát a konvergencia nem egyenletes.

c.) $\|\, f_n-f\,\|_{I_2}=\sup\limits_{x\in(2,\infty)}\dfrac{1}{x^n}=\dfrac{1}{2^n}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\|\, f_n-f\,\|_{I_2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2^n}=0$

Tehát a konvergencia egyenletes.

Pl.

$$f_n(x)=\frac{x^2+x+n}{x^2+n}$$

a.) $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=?$

b.) Egyenletes-e a konvergencia a $I_1=[-2,5]$ intervallumon?

c.) $\|\, f_n-f\,\|=?,\quad$ ha $x\in[0,\infty)$
Egyenletes-e a konvergencia a $I_2=[0,\infty)$ intervallumon?

Megoldás:

a.) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x^2+x+n}{x^2+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{x^2+x}{n}+1}{\dfrac{x^2}{n}+1}=1=f(x)\qquad\forall\, x\in\mathbb{R}=D_f$

b.) $\|\, f_n-f\,\|_{[-2,5]}=\sup\limits_{x\in[-2,5]}\left|\dfrac{x^2+x+n}{x^2+n}-1\right|=\sup\limits_{x\in[-2,5]}\dfrac{|x|}{x^2+n}\leq\dfrac{5}{n}$

$0\leq\lim\limits_{n\to\infty}\|\, f_n-f\,\|_{[-2,5]}\leq\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5}{n}=0\quad\Longrightarrow\quad\lim\limits_{n\to\infty}\|\, f_n-f\,\|_{[-2,5]}=0$

Tehát a konvergencia egyenletes az I_1 intervallumon.

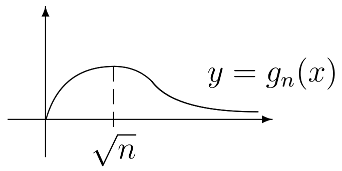
c.) $\|\, f_n-f\,\|_{[0,\infty)}=\sup\limits_{x\in[0,\infty)}\left|\dfrac{x^2+x+n}{x^2+n}-1\right|=\sup\limits_{x\in[0,\infty)}\dfrac{|x|}{x^2+n}=\sup\limits_{x\in[0,\infty)}\underbrace{\dfrac{x}{x^2+n}}_{:=g_n(x)}$

$g_n(0)=0;\qquad\lim\limits_{x\to\infty}g_n(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1+\frac{n}{x^2}}=0$

($g_n(x) \geq 0$ és az előzőek miatt $\sup\limits_{x\in[0,\infty)} g_n(x) = \max\limits_{x\in[0,\infty)} g_n(x)$ lesz.)

$$g_n'(x) = \left(\frac{x}{x^2+n}\right)' = \frac{x^2+n-2x^2}{(x^2+n)^2} = \frac{n-x^2}{(x^2+n)^2} = 0, \text{ ha } x = +\sqrt{n}$$

	$(0,\sqrt{n})$	$\sqrt{n}$	$(\sqrt{n},\infty)$
g'	$+$	0	$-$
g	$\nearrow$	lok. max.	$\searrow$



Tehát jelenleg az abszolut maximum a lokális maximum értéke lett.

$$g_n(\sqrt{n}) = \frac{\sqrt{n}}{\left(\sqrt{n}\right)^2+n} = \frac{1}{2\sqrt{n}} = \max_{x>0} \; g_n(x)$$

Tehát $\| f_n - f \|_{[0,\infty)} = \dfrac{1}{2\sqrt{n}} \xrightarrow[\infty]{n} 0 \quad \Longrightarrow \quad f_n \rightrightarrows f \quad x \in I_2 = [0,\infty)$-en.

1.4. $[a,b]$-n egyenletesen konvergens függvénysorozatok tulajdonságai

(a határfüggvény folytonossága, differenciálhatósága és integrálhatósága)

T$_1$ | Ha az f_n függvények folytonosak x_0-ban és $f_n \rightrightarrows f$ $K_{x_0,r}$-ben, akkor az $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ határfüggvény is folytonos x_0-ban. |

M A tétel jelentése:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \overset{\text{u}}{\lim_{n\to\infty}} f_n(x) \;=\; \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$$

B Igaz-e? $\quad |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, ha $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$

Tudjuk: $f_n \rightrightarrows f$ $K_{x_0,r}$-ben $\quad \Longrightarrow \quad \| f_n - f \| \to 0$ itt. Vagyis

$$\| f_n - f \| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{ha } n > N_0\left(\frac{\varepsilon}{3}\right)$$

Tekintsünk egy ilyen f_n függvényt ($n > N_0$), ez folytonos x_0-ban. Ezért

$$|f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{ha } |x - x_0| < \delta_1\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) \leq r$$

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \leq$$

$$\leq |f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(x_0)|+|f_n(x_0)-f(x_0)| \leq$$
$$\leq \sup_{x\in[a,b]} |f(x)-f_n(x)|+|f_n(x)-f_n(x_0)|+\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x)-f(x)| =$$
$$\| f-f_n \| +|f_n(x)-f_n(x_0)|+ \| f-f_n \| \leq \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon, \quad \text{ha } |x-x_0|<\delta(\varepsilon)=\delta_1\left(\frac{\varepsilon}{3}\right) \qquad \blacksquare$$

●●●

A tétel általánosítható intervallumra is:

Ⓣ $\boxed{(f_n \in C^0_I \quad \text{és} \quad f_n \rightrightarrows f \quad \text{I-n}) \quad \Longrightarrow \quad f \in C^0_I}$

Belső pontra a fenti T_1 tétel bizonyítása jó. Zárt intervallum esetén a végpontokban csak féloldali folytonosság kell, ekkor a fenti bizonyításban $x > x_0 = a$ vagy $x < x_0 = b$ feltételt is figyelembe kell vennünk.

Következmény:
Ha az f_n függvények folytonosak az I intervallumon, de az f határfüggvény nem folytonos ugyanitt, akkor a konvergencia nem egyenletes.

●●●

Ⓜ $C^0_{[a,b]}$ lineáris normált tér az uniform normával. A *tér zárt* az uniform normában való konvergencia fogalomra nézve, de nem zárt a pontonkénti konvergencia fogalomra nézve.

($f_n \in C^0_{[a,b]}$, $f_n \xrightarrow{\text{u}} f$ esetén $f \in C^0_{[a,b]}$.)

Ⓓ $\mathcal{L}(\| \ . \ \|)$ lineáris normált teret *teljes*nek nevezzük, ha $\forall$ Cauchy sorozata a tér valamely eleméhez konvergál.

1. pl.: $\mathbb{R}$ lineáris normált tér (norma: $|\,.\,|$ absz. érték), mely teljes.
Ui.: $\forall$ Cauchy sorozat konvergens.

2. pl.: $\mathbb{Q}$ nem teljes. Pl. $e_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \in \mathbb{Q}$; e_n Cauchy sorozat, de $\lim\limits_{n\to\infty} e_n = \mathrm{e} \notin \mathbb{Q}$

3. pl.: $C^0_{[a,b]}$ az uniform normával teljes normált tér.

Elégséges feltétel az integráljel és a limesz felcserélhetőségére:

Ⓣ₂ Ha $f_n \in C^0_{[a,b]}$ és

$$\left(f_n \rightrightarrows f \text{ vagyis } f_n \xrightarrow{\text{u}} f\right) \underset{[a,b]\text{-n}}{} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \underbrace{\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x}_{a_n} = \int_a^b \overset{\text{u}}{\lim_{n\to\infty}} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}_{A}$$

Feltettük, hogy $a < b$.

(B) T_1 miatt $\quad f \in C^0_{[a,b]} \quad \Longrightarrow \quad f \in R_{[a,b]}\,, \quad$ tehát $\exists \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Megmutatjuk, hogy a $a_n = \displaystyle\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$ numerikus sorozat konvergens és határértéke:

$$A = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \qquad (\text{vagyis } |a_n - A| < \varepsilon,\ \ n > N(\varepsilon)\,).$$

$$\left|\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^b \left(f_n(x) - f(x)\right)\,\mathrm{d}x\right| \le \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x \le$$

$$\le \int_a^b \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_a^b \| f_n - f \| \ \mathrm{d}x = \| f_n - f \| \cdot (b-a) < \varepsilon, \quad \text{ha } n > N\left(\frac{\varepsilon}{b-a}\right)$$

Ui.:$\| f_n - f \|$ kiemelhető az integrálból, mert független x-től.

Továbbá $\| f_n - f \| < \dfrac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon^*$, ha $n > N(\varepsilon^*) = N\left(\dfrac{\varepsilon}{b-a}\right)$, mivel $\| f_n - f \| \underset{\infty}{\overset{n}{\to}} 0$. ■

<u>Következmény:</u>
Ha az $[a,b]$ intervallumon vett integrálok nem konvergálnak a határfüggvény integráljához, akkor a konvergencia nem egyenletes az $[a,b]$ intervallumon.

Elégséges feltétel a deriválás operátora és a limesz felcserélésére:

(T3)

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Ha } f_n \in C^1_{[a,b]} \text{ és } [a,b]\text{-n} \\ \left.\begin{array}{ll} f_n' \xrightarrow{\mathrm{u}} g & (\text{egyenl. konv.}) \\ f_n \to f & (\text{pontonkénti konv. }) \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad f \text{ differenciálható } [a,b]\text{-n és } f' = g \end{array}}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = f'(x) \ = \ g(x) = \overset{\mathrm{u}}{\lim_{n\to\infty}} f_n'(x) = \overset{\mathrm{u}}{\lim_{n\to\infty}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x)\right)$$

(B) T_1 miatt $g \in C^0_{[a,b]}$

T$_2$ miatt: $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t \quad \forall\, x \in [a,b]$-re

Tehát

$$\underbrace{\lim_{n\to\infty} \left(f_n(x) - f_n(a)\right)}_{=f(x)-f(a)} = \underbrace{\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t}_{\text{differenciálható } g \text{ folytonossága miatt}}$$

Az egyenlőség miatt ekkor a bal oldal is differenciálható.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f(x) - f(a)\right) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = g(x)$$

■

Pl.

$$f_n(x) = \frac{2\,n^2\,x^2 + x}{n^2\,x^2 + 3}$$

a.) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = ?$

b.) Egyenletes-e a konvergencia a $[0,2]$, illetve a $[3,5]$ intervallumon?

Megoldás:

a.)

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{2\,x^2 + \dfrac{x}{n^2}}{x^2 + \dfrac{3}{n^2}} = 2\,, \text{ ha } x \neq 0 \text{ és } f(0) = 0\,, \text{ mivel } f_n(0) = 0\ \forall\, n\text{-re}$$

b.) Ennek megfelelően a $[0,2]$ intervallumon nem egyenletes a konvergencia, mert bár az f_n függvények folytonosak, de az f határfüggvény nem folytonos itt. Így a T_1 tétel értelmében nem lehet a konvergencia egyenletes.

A $[3,5]$ intervallumon a határfüggvény folytonos, de ebből még nem következik az egyenletes konvergencia. Meg kell vizsgálni a normát!

$$0 \le \| f_n - f \|_{[3,5]} = \sup_{x\in[3,5]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[3,5]} \left| \frac{2\,n^2\,x^2 + x}{n^2\,x^2 + 3} - 2 \right| =$$

$$= \sup_{x\in[3,5]} \left| \frac{2\,n^2\,x^2 + x - 2\,n^2\,x^2 - 6}{n^2\,x^2 + 3} \right| = \sup_{x\in[3,5]} \left| \frac{x - 6}{n^2\,x^2 + 3} \right| =$$

$$= \sup_{x\in[3,5]} \frac{6 - x}{n^2\,x^2 + 3} \le \frac{6 - 3}{n^2\,3^2} = \frac{1}{3n^2}$$

$$\underset{\text{rendőrelv}}{\Longrightarrow} \quad \lim_{n\to\infty} \| f_n - f \| = 0$$

$\Longrightarrow$ f_n egyenletesen konvergál f-hez a $[3,5]$ intervallumon.

Pl. $f_n(x) = \begin{cases} n^2 x, & \text{ha } 0 \le x \le \dfrac{1}{n} \\ \dfrac{1}{x}, & \text{ha } \dfrac{1}{n} < x \le 2 \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}^+$

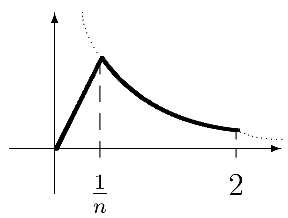
a.) $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = ?$ $\qquad x \in [0,2] = I$

b.) Egyenletes-e a konvergencia I-n?

Megoldás:

a.) $x = 0:$ $\quad f_n(0) = 0 \to 0 = f(0)$

Ha $0 < x \le 2$ és $x > \dfrac{1}{n}$, vagyis $n > \dfrac{1}{x}$ már fennáll, akkor $f_n(x) = \dfrac{1}{x} \to \dfrac{1}{x} = f(x)$



Tehát $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x = 0 \\ \dfrac{1}{x}, & \text{ha } 0 < x \le 2 \end{cases}$

b.) f_n-ek folytonosak, f nem folytonos I-n $\Longrightarrow$ (f_n) nem egyenletesen konvergens I-n.

Pl. Bizonyítsa be, hogy $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\sin(n^4x^2+3)}{x^3+n^3}\, dx = 0$

Megoldás:

Meg kell próbálni belátni, hogy a lim és az $\int$ felcserélhető. (f_n) egyenletesen konvergens-e?

$$f_n(x) := \frac{\sin(n^4x^2+3)}{x^3+n^3} \in C^0_{[0,2\pi]}, \qquad f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n^4x^2+3)}{x^3+n^3} = 0 \quad \left(\tfrac{\text{korl.}}{\infty} \text{ alakú}\right)$$

$$0 \le \| f_n - f \| = \sup_{x\in[0,2\pi]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in[0,2\pi]} \underbrace{\frac{|\sin(n^4x^2+3)|}{x^3+n^3} \le \frac{1}{n^3}}_{\text{Ez most elég.}} \xrightarrow[\infty]{n} 0$$

A rendőrelv alapján kapjuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \| f_n - f \| = 0$.

Tehát $f_n \rightrightarrows f \quad [0,2\pi]$-n és f_n folytonos $\Longrightarrow$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \underbrace{\lim_{n\to\infty} f_n(x)}_{=f(x)\equiv 0}\,\mathrm{d}x = 0$$

Pl.

> $$f_n(x) = x^2 + \frac{1}{n}\sin\Big(n\,(x+\frac{\pi}{2})\Big), \qquad x\in(-\infty,\infty)$$
>
> Írja fel a határfüggvényt! Egyenletes-e a konvergencia?
>
> $$\overset{\mathrm{u}}{\lim_{n\to\infty}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x) \overset{?}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

Megoldás:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \lim_{n\to\infty}\left(x^2 + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\substack{\downarrow\\0}}\ \underbrace{\sin\Big(n\,(x+\frac{\pi}{2})\Big)}_{\text{korlátos}}\right) = x^2$$

$$\| f_n - f \| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{1}{n}\sin\Big(n\,(x+\frac{\pi}{2})\Big)\right| = \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty} \| f_n - f \| = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0 \quad \Longrightarrow \quad f_n \text{ egyenletesen konvergál } f\text{-hez } (-\infty,\infty)\text{-en}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x) = 2x + \frac{1}{n}\,n\,\cos\Big(n\,(x+\frac{\pi}{2})\Big) = 2x + \cos\Big(n\,(x+\frac{\pi}{2})\Big), \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = 2x$$

Tehát $$\underbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_n(x)}_{\nexists} \neq \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 2x\,,$$

mert $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\Big(n\,(x+\frac{\pi}{2})\Big)$ nem létezik.

A példa mutatja, hogy nem elég a függvénysorozat egyenletes konvergenciája a deriválás és a határérték képzés felcserélhetőségéhez.

2. Függvénysorok

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = f_0(x) + f_1(x) + \cdots + f_k(x) + \cdots \qquad\qquad D := \bigcap_{k=0}^{\infty} D_{f_k}$$

(D) $s_n(x) := \sum\limits_{k=0}^{n} f_k(x)$: n-edik részletösszeg függvény

$r_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} f_k(x)$: n-edik maradékösszeg függvény (Jelöljük $R_n(x)$ módon is.)

(D) $H \subset D$ *konvergenciatartomány:*

$$\forall\, x_0 \in H\text{-ra} \ \ \exists \lim_{n\to\infty} s_n(x_0)$$

(Pontonkénti konv.)
Következmény: $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x_0) = 0$.

Összegfüggvény: $s(x)$

$$s(x_0) := \lim_{n\to\infty} s_n(x_0) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x_0)$$

(Pl.) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \left(\dfrac{x}{3}\right)^k = \dfrac{\frac{x}{3}}{1-\frac{x}{3}}$, ha $|x| < 3$

Tehát $\quad s(x) = \dfrac{x}{3-x}$, $\qquad H = (-3, 3)$

(D) *Egyenletes konvergencia:*

$H_1 \subset H$-n $\ \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ egyenletesen konvergál az s összegfüggvényhez, ha $s_n \underset{H_1}{\rightrightarrows} s$.

Vagyis $s_n \xrightarrow{u} s$, tehát

$$\lim_{n\to\infty} \parallel s - s_n \parallel = \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{x\in H_1} |s(x) - s_n(x)| \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{x\in H_1} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \right) = 0$$

(Pl.)

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} x^k$ egyenletesen konvergál az $s(x) = \dfrac{1}{1-x}$ függvényhez a $H_1 = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ intervallumon, mert

$$0 \le \sup_{|x|\le 1/2} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} x^k \right| = \underbrace{\sup_{|x|\le 1/2} \left| \frac{x^{n+1}}{1-x} \right|}_{\le \frac{(1/2)^{n+1}}{1-1/2} \to 0} \text{ tart } 0\text{-hoz a rendőrelv miatt.}$$

$H_1 = [\alpha, \beta] \subset (-1, 1) = H$ esetén hasonló meggondolás lehet.

(T) Ha $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ egyenletesen konvergens H_1-en, akkor pontonként is konvergens.

(T) $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ egyenletesen konvergens H_1-en $\iff$ (s_n) Cauchy sorozat H_1-en, vagyis

$$\| s_n - s_m \| = \| f_{n+1} + f_{n+2} + \cdots + f_{n+k} \| = \sup_{x\in H_1} |f_{n+1}(x) + \cdots + f_m(x)| < \varepsilon\,,$$

$$\forall\, n > N(\varepsilon)\,,\ k \in \mathbb{N}.$$

(D) *Abszolut konvergencia:*

$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ abszolut konvergens x_0-ban, ha $\sum_{k=0}^{\infty} |f_k(x_0)|$ konvergens.

$$(\Longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \text{ is konvergens } x_0\text{-ban.})$$

2.1. Weierstrass kritérium

(Egy elégséges tétel függvénysor egyenletes konvergenciájára.)

(T) Ha $\exists\,(b_k)$, hogy $|f_k(x)| \le b_k\,;\ x \in H\,;\ k = 0, 1, \ldots$ és $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergens numerikus sor, akkor $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ egyenletesen és abszolút konvergens H-n.

(B) (s_n) uniform normában konvergál s-hez, mert (s_n) uniform normában Cauchy sorozat. Ugyanis

$$\| s_n - s_m \| = \sup_{x\in H} |f_{n+1}(x) + \cdots + f_m(x)| \le \sup_{x\in H} (|f_{n+1}(x)| + \cdots + |f_m(x)|) \le$$

$$\le \sup_{x\in H} |f_{n+1}(x)| + \cdots + \sup_{x\in H} |f_m(x)| \le b_{n+1} + \cdots + b_m < \varepsilon, \quad \text{ha } m > n > N(\varepsilon),$$

mert $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ teljesíti a Cauchy kritériumot, ugyanis $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergens. Ebből következik az abszolút és az egyenletes konvergencia is.

■

(Pl.) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin\left(n^3 x + \pi\right)}{n^2+1}$ egyenletesen konvergens $\mathbb{R}$-en, mert

$$|f_n(x)| \le \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2} = b_n\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \quad \text{és} \quad \sum b_n = \sum \frac{1}{n^2} \ \text{konvergens.}$$

(Pl.) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\mathrm{e}^{-n(|x|+1)}$

$$|f_n(x)| = f_n(x) = \frac{n}{\left(\mathrm{e}^{|x|+1}\right)^n} < \frac{n}{\mathrm{e}^n} = b_n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\mathrm{e}^n} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \ \text{ konvergens, mert } \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{\mathrm{e}} = \frac{1}{\mathrm{e}} < 1 \quad \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \ \text{ egyenletesen konvergens } \mathbb{R}\text{-en.}$$

2.2. $[a,b]$ intervallumon egyenletesen konvergens függvénysorok tulajdonságai

(T_1^*)

> Ha $f_k \in C^0_{[a,b]}$ és $[a,b]$-n $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ egyenletesen konvergens ($s_n \rightrightarrows s \quad [a,b]$-n), akkor az $s(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ összegfüggvény folytonos az $[a,b]$ intervallumon.

(B) A függvénysorozatokra vonatkozó megfelelő T_1 tétellel.

f_k folytonos $[a,b]$-n $\quad \Longrightarrow \quad \left(s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k \text{ is folytonos } [a,b]\text{-n}\right)$ és ($s_n \rightrightarrows s \quad [a,b]$-n)

$\underset{\mathrm{T}_1 \text{ miatt}}{\Longrightarrow}$ s (s_n határfüggvénye) is folytonos $[a,b]$-n.

■

(M) A tétel jelentése:

$$\lim_{x\to x_0} s(x) = \lim_{x\to x_0} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty} \lim_{x\to x_0} f_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x_0) = s(x_0)$$

T$_2^*$ Ha $f_k \in C^0_{[a,b]}$ és $[a,b]$-n $\sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ egyenletesen konvergens ($s_n \rightrightarrows s \quad [a,b]$-n), akkor

$$\int\limits_a^b s(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x$$

B

$$\int\limits_a^b \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b \overset{\mathrm{u}}{\lim_{n\to\infty}} s_n(x)\,\mathrm{d}x \overset{T_2}{=} \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^b s_n(x)\,\mathrm{d}x = *$$

Mivel szabad tagonként integrálni (véges összegről van szó), azaz

$$\int\limits_a^b \sum_{k=0}^{n} f_k(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \int\limits_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

ezért

$$* = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \int\limits_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x$$

■

T$_3^*$ Ha $f_k \in C^1_{[a,b]}$ és $[a,b]$-n

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k'(x) = g(x) \qquad \text{és a konvergencia egyenletes}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) = s(x) \qquad \text{(pontonként konvergál),}$$

akkor s deriválható $[a,b]$-n, és $s' = g$.

Tehát

$$s'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} s(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x) \quad = \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f_k(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k'(x) = g(x)$$

T$_3^*$ bizonyítása a függvénysorozatokra vonatkozó megfelelő T$_3$ tételre való visszavezetéssel történik.

Pl.

$$\lim_{x\to 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left(n^3 x^2 + \dfrac{\pi}{2}\right)}{5^n + n^2 x^4} = ?$$

Megoldás:
Mivel a sor összegfüggvényét nem tudjuk felírni, csak akkor van reményünk a feladat megoldására, ha a limeszképzés és a szummázás felcserélhető. Ez a folytonosságról szóló T_1^* tétel alkalmazását igényli.

$$f_n(x) = \frac{\sin\left(n^3\, x^2 + \dfrac{\pi}{2}\right)}{5^n \,+\, n^2\, x^4} \in C^0_{\mathbb{R}} \quad \text{és a sor konvergenciája egyenletes } \mathbb{R}\text{-en, mert}$$

$$|f_n(x)| = \frac{\left|\sin\left(n^3\, x^2 + \dfrac{\pi}{2}\right)\right|}{5^n \,+\, n^2\, x^4} \le \frac{1}{5^n} = b_n\,, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{és} \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n \quad \text{konvergens}$$

gemetriai sor $\left(0 \le q = \dfrac{1}{5} \le 1\right)$.

$$\underset{\text{Weierstrass kr.}}{\Longrightarrow} \quad \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \text{ függvénysor egyenletesen konvergens } \mathbb{R}\text{-en.}$$

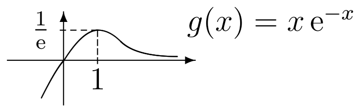
Így a T_1^* tétel feltételei teljesülnek, tehát alkalmazható:

$$\lim_{x\to 0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin\left(n^3\, x^2 + \dfrac{\pi}{2}\right)}{5^n \,+\, n^2\, x^4} = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{x\to 0} \frac{\sin\left(n^3\, x^2 + \dfrac{\pi}{2}\right)}{5^n \,+\, n^2\, x^4} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = \frac{1}{1-\dfrac{1}{5}} = \frac{5}{4}$$

Pl. $\boxed{\text{Igaz-e} \quad \displaystyle\int_0^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\mathrm{e}^{nx}}\, \mathrm{d}x \overset{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^2 \frac{x^n}{\mathrm{e}^{nx}}\, \mathrm{d}x}$

Megoldás:

$$f_n(x) = \left(\frac{x}{\mathrm{e}^x}\right)^n = (x\mathrm{e}^{-x})^n = (g(x))^n \in C^0_{\mathbb{R}}$$



Emiatt a $[0,2]$ intervallumon $\quad |f_n(x)| \le \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^n$ és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}}\right)^n$ konvergens ,

$\left(0 < q = \dfrac{1}{\mathrm{e}} < 1\,,\right.$ geometriai sor).

Tehát a Weierstrass kritérium miatt $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ egyenletesen konvergens $[0\,,\infty)$-en és $[0\,,\,2] \subset [0\,,\infty)$.

Az előzőek miatt $\int$ és $\sum$ felcserélhető (T_2^*) .

Pl. $\boxed{\text{Szabad-e tagonként deriválni a } \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{n}}{n^2} \text{ sort?}}$

Megoldás:

$$|f_n(x)| = \frac{\left|\operatorname{arctg} \frac{x}{n}\right|}{n^2} < \frac{\frac{\pi}{2}}{n^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{\pi}{2}}{n^2} = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \ \text{konvergens} \ \overset{\text{Weierstrass kr.}}{\Longrightarrow} \ \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \ \text{egyenletesen konvergens } \mathbb{R}\text{-en}$$

$$\Longrightarrow \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \ \text{pontonként konvergens } \mathbb{R}\text{-en.}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) \ \text{egyenletesen konvergens-e?}$$

$$f_n \in C^1_{\mathbb{R}} \qquad f_n'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{n}}{n^2} = \frac{1}{n^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{arctg} \frac{x}{n} = \frac{1}{n^2} \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{n}\right)^2} \cdot \frac{1}{n}$$

$$|f_n'(x)| = \frac{1}{n^3} \frac{1}{1 + \frac{x^2}{n^2}} \le \frac{1}{n^3} \ \text{ és } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} \ \text{konvergens} \ \Longrightarrow \ \text{egyenletes a konvergencia.}$$

(Weierstrass kritérium)

T_3^* feltételei teljesülnek $\quad \Longrightarrow \quad$ a sor tagonként deriválható.

2.3. Speciális függvénysorok

A továbbiakban az alábbi speciális függvénysorokkal ismerkedünk meg:

1.) Hatványsorok (Taylor sorok)

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k \quad : \quad x_0 \text{ középpont körüli}$$

$$(a_k \in \mathbb{R})$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad : \quad \text{origó körüli}$$

2.) Trigonometrikus sorok (Fourier sorok)

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

3. Hatványsorok

Elég a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k$ hatványsorral foglalkozni, mert az x_0 bázispontú hatványsor $u := x - x_0$ helyettesítéssel $\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, u^k$ alakú lesz.

T$_1$ Ha a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ sor x_2-ben konvergens, akkor $|x_1| < |x_2|$ esetén x_1-ben abszolút konvergens és így konvergens is.

B Megmutatjuk, hogy x_1-ben abszolút konvergens $\Longrightarrow$ konvergens is.

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_2^k$ konvergens $\Longrightarrow$ $\lim_{k\to\infty} a_k x_2^k = 0$ (a konvergencia szükséges feltétele)

Konvergens sorozat korlátos, tehát $\exists\, K :\ \left|a_k x_2^k\right| \le K \quad \forall\, k$-ra

$$\left|a_k x_1^k\right| = |a_k|\ |x_2|^k \left|\frac{x_1}{x_2}\right|^k \le K q^k\,, \quad |q| = \left|\frac{x_1}{x_2}\right| < 1,$$

és $\sum_{k=0}^{\infty} K q^k$ konvergens majoráns $\quad (= \frac{K}{1-q})$.

Így $\sum_{k=0}^{\infty} \left|a_k x_1^k\right|$ konvergens $\Longrightarrow$ $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_1^k$ konvergens.

■

T$_2$ Ha a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ hatványsor az $x = x_2$ helyen divergens, akkor $|x_1| > |x_2|$ esetén x_1-ben is divergens.

B Indirekt.

Feltesszük, hogy x_1-ben konvergens. De ekkor $\forall\, |x_2| < |x_1|$-re is konvergens lenne az előző tétel miatt, ami ellentmondás.

■

Következmény:

E két tételből már látható, hogy a $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ hatványsor H konvergenciatartománya mindig $x_0 = 0$ középpontú, R sugarú nyílt intervallumból és esetleg az R vagy $-R$ végpontokból áll, ahol

$R = \sup\{\, |x|,\ $ a hatványsor az x pontban abszolút konvergens$\}$.

R neve: *konvergenciasugár*

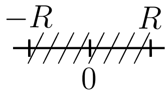
Mivel 0-ban a fenti hatványsor mindig abszolút konvergens, azért H nem üres halmaz, $R > 0$ vagy $R = 0$ vagy $R = \infty$ lehetséges. Az egyes példáknál látjuk majd, hogy ezek az esetek valóban előfordulnak. A hatványsor a $(-R, R)$ pontjaiban abszolút konvergens. A hatványsor a $(-\infty, R)$ vagy a (R, ∞) pontjaiban nem abszolút konvergens de itt konvergencia sem állhat fenn a második tétel miatt, itt tehát divergens a hatványsor. Megjegyezzük, hogy az $0 < R < \infty$ esetén az $x = -R$ illetve az $x = R$ pontokban mind a konvergencia, mind pedig a divergencia fennállhat. Ezért az $x = -R$ illetve az $x = R$ pontokban minden egyes hatványsor esetében külön kell vizsgálódnunk.

Tehát a lehetséges esetek:

a.) $H = \{0\}$ ($R = 0$ esete.) Pl. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k!\, x^k$, mert $\lim\limits_{k\to\infty} k!\, x^k \neq 0$, ha $x \neq 0$.

b.) $\exists\, R > 0$: $|x| < R$-ben konvergens

$|x| > R$-ben divergens



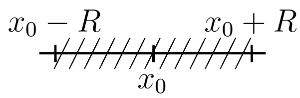
$|x| = R$? (Nem tudjuk. Minden esetben meg kell vizsgálni.)

c.) $H = \mathbb{R}$ ($R = \infty$)

Áttérve az x_0 középpontú hatványsorokra, kapjuk az alábbi állítást.

T$_3$

> A $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ hatványsor konvergenciatartománya x_0 középpontú intervallum (nyílt, vagy zárt, vagy csak egyik oldalról zárt). Az intervallum belső pontjaiban a hatványsor abszolút konvergens.



Vagyis a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$ hatványsor $|x - x_0| < R$ - ben abszolút konvergens, $|x - x_0| > R$ - ben divergens, ahol R a sor konvergencia sugara.
A végpontokban a konvergenciát külön kell vizsgálni. Természetesen $R = 0$, illetve $R = \infty$ most is lehet.

Pl. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{x^k}{k} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n}$

$$\left.\begin{array}{l} x = 1\text{-ben} \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n} \ \text{divergens} \underset{T_2\, miatt}{\Longrightarrow} |x| > 1 - \text{ben div.} \\[2ex] x = -1\text{-ben} \quad \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} \ \text{konvergens} \underset{T_1\, miatt}{\Longrightarrow} |x| < 1 - \text{ben konv.} \end{array}\right\} \Longrightarrow R = 1$$

Tehát most $H = [-1, 1)$.

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ konvergencia sugara már nem vizsgálható az előbbi módszerrel, mert $x = \pm 1$-ben a sor konvergens. Ettől $R > 1$ is igaz lehetne.

Hogyan határozható meg R?

3.1. A konvergenciasugár meghatározása

A hatványsor konvergenciasugarának meghatározására két lehetőségünk is lesz. Ezekhez felhasználjuk a pozitív tagú sorokra vonatkozó általánosított gyök- ill. hányados kritériumot.

Emlékeztető $\left(\sum^{\infty} c_n, \quad c_n > 0\right)$:

Gyökkritérium:

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{c_n} \begin{array}{ll} < 1 & \text{a sor konv.} \\ > 1 & \text{a sor div.} \\ = 1 & ? \end{array}$$

Hányados kritérium:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} \begin{array}{ll} < 1 & \text{a sor konv.} \\ > 1 & \text{a sor div.} \\ = 1 & ? \end{array}$$

Ezeket a konvergencia eldöntésére most is felhasználhatjuk. Nézzünk egy példát!

Pl. $\boxed{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+x^2)^n}{4^{nx} n^n} \quad \text{Milyen } x\text{-re konvergens?}}$ (Ez nem hatványsor!)

$\forall\, x$-re pozitív tagú. $\quad \sqrt[n]{c_n} = \dfrac{1+x^2}{4^x n} \xrightarrow[\infty]{n} 0 < 1 \quad \Longrightarrow \quad \forall\, x$-re konvergens

•••

Visszatérve a $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ hatványsorokra, két tétel is kimondható.

T4

> $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor R konvergencia sugara:
>
> $\alpha := \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$ $\qquad$ „$R = \frac{1}{\alpha}$"
>
> 1. $R = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}$, $\qquad$ ha $\alpha > 0$ véges
> 2. $R = \infty$, $\qquad$ ha $\alpha = 0$
> 3. $R = 0$, $\qquad$ ha $\alpha = \infty$

B

Az $x = 0$-ban a sor abszolút konvergens, ezért csak $x \neq 0$-ban vizsgálódunk. Az abszolút konvergenciát vizsgáljuk, tehát $\sum_{}^{\infty} c_n := \sum_{}^{\infty} |a_n x^n|$ sorra alkalmazzuk a a pozitív tagú sorokra vonatkozó általánosított gyökkritériumot.

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|\,|x|^n} = |x| \underbrace{\overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}}_{:=\alpha} = |x|\,\alpha = q$$

a.) Ha $\alpha = 0$, akkor $q = 0 < 1$, tehát a sor minden x -re abszolút konvergens, $R = \infty$

b.) Ha $\alpha \neq 0$, akkor $|x|\ \alpha = q < 1$, azaz $|x| < 1/\alpha$ esetén a sor abszolút konvergens és $|x| > 1/\alpha$ esetén ($q > 1$) a sor nem abszolút konvergens, így $R = 1/\alpha$.

c.) Ha $\alpha = \infty$, akkor $|x|\ \alpha = q = \infty$ (mivel $x \neq 0$), vagyis a sor nem abszolút konvergens semmilyen x esetén se, így $R = 0$. (Tehát csak $x = 0$ esetén konvergens a hatványsor.)

●●●

T5

> Ha létezik a $\alpha := \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$, akkor a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ hatványsor R konvergencia sugara:
>
> $R = \frac{1}{\alpha}$, $\qquad$ ha $\alpha > 0$ véges
>
> $R = \infty$, $\qquad$ ha $\alpha = 0$
>
> $R = 0$, $\qquad$ ha $\alpha = \infty$

B

Az előző tételhez hasonlóan történik, csak most a hányados kritériumot használjuk. A $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ abszolút konvergenciáját $x \neq 0$ esetben vizsgáljuk (az $x = 0$-ban abszolút konvergens).

Ha

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|\,|x|^{n+1}}{|a_n|\,|x|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\,|x| = \alpha\,|x| = q < 1\,,$$

akkor a sor abszolút konvergens, ha $q > 1$, akkor nem abszolút konvergens.

a.) Ha $\alpha = 0$, akkor $q = 0$ minden x-re, a sor minden x-re abszolút konvergens, tehát $R = \infty$.

b.) Ha $\alpha > 0$, akkor $|x| < 1/\alpha$ esetén fennáll az abszolút konvergencia, az $|x| > 1/\alpha$ esetén nem áll fenn az abszolút konvergencia. Tehát $R = 1/\alpha$.

c.) Ha $\alpha = \infty$, akkor $q = \infty$ (ugyanis $x \neq 0$), a sor minden $x \neq 0$ esetén divergens, tehát $R = 0$.

●●●

Példák:

Pl. $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(-3)^n}\, x^n \qquad \text{Konvergenciatartomány?}}$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{|(-3)^n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{3} = \frac{1}{3} = \frac{1}{R} \quad \longrightarrow \quad R = 3 \quad \Longrightarrow$$

$|x| < 3$-ban, vagyis $(-3, 3)$-ban abszolút konvergens.
$|x| > 3$-ban divergens.
$|x| = 3$-ra meg kell vizsgálni:

$x = -3:\quad \displaystyle\sum_{0}^{\infty} \frac{n}{(-3)^n}\,(-3)^n = \sum_{0}^{\infty} n$ divergens, mert $n \not\to 0$ (szüks. felt. nem teljesül)

$x = 3:\quad \displaystyle\sum_{0}^{\infty} \frac{n}{(-3)^n}\,3^n = \sum_{0}^{\infty} (-1)^n\, n$ divergens, mert $(-1)^n\, n \not\to 0$ (szüks. felt. nem teljesül)

Így a konvergenciatartomány: $(-3, 3)$

Pl. $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!\, x^n \qquad \text{Konvergenciatartomány?}}$

$$a_n = n! \qquad \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)!}{n!} = n + 1 \to \infty \quad \Longrightarrow \quad R = 0$$

Csak $x = 0$-ban konvergens a sor.

Pl. $\boxed{\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n^2+n)\,(x+2)^n \qquad \text{Konvergenciatartomány?}}$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+1)^2+(n+1)}{n^2+n} = \frac{n+2}{n} = 1+\frac{2}{n} \quad \to \; 1 = \frac{1}{R} \quad \longrightarrow \quad R=1$$

$$\begin{aligned} x_0 = -2 \qquad |x-(-2)| = \; & |x+2| < 1\text{-ben konvergens} \\ & |x+2| > 1\text{-ben divergens} \\ & |x+2| = 1\ ? \end{aligned}$$

$x=-2+1=-1:\quad \displaystyle\sum^{\infty} (n^2+n)$ divergens, mert az általános tag $\not\to 0$.

$x=-2-1=-3:\quad \displaystyle\sum^{\infty} (n^2+n)(-1)^n$ divergens, mert az általános tag $\not\to 0$.

Konvergenciatartomány: $(-3,-1)$

Pl. $\boxed{1-3x+2^2x^2-3^3x^3+2^4x^4-3^5x^5+\cdots \qquad R=?}$

$$|a_n| = \begin{cases} 2^n, & \text{ha } n \text{ páros} \\ 3^n, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \begin{cases} 2, & \text{ha } n \text{ páros} \\ 3, & \text{ha } n \text{ páratlan} \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \text{Torlódási pontok: } t_1 = 2\,,\; t_2 = 3$$

$$\Longrightarrow \quad \overline{\lim}\, \sqrt[n]{|a_n|} = 3 = \frac{1}{R} \quad \longrightarrow \quad R = \frac{1}{3}$$

Pl. Keresse meg az alábbi sorok konvergenciatartományát!

a.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\cdot 9^n}\, x^n$ b.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\cdot 9^n}\, (x-1)^n$ c.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\cdot 9^n}\, (x-1)^{2n}$

a.) $\displaystyle\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{|(-1)^n|}{n\cdot 9^n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}\cdot 9} \to \frac{1}{9} = \frac{1}{R} \quad \longrightarrow \quad R=9;\; x_0=0$

$x=9:\quad \displaystyle\sum^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\cdot 9^n}\cdot 9^n = \sum^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konvergens (de nem abszoluú konvergens)

$x=-9:\quad \displaystyle\sum^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\cdot 9^n}\cdot (-9)^n = \sum^{\infty} \frac{1}{n}\,(-1)^{2n} = \sum^{\infty} \frac{1}{n}$ divergens

KT (konvergenciatartomány): $(-9,9]$ $\underline{\underline{-9 < x \le 9}}$

b.) Most $x_0 = 1$, ennek a 9 sugarú környezetéről van szó.

KT: $-9 < x-1 \le 9 \quad \longrightarrow \quad \underline{\underline{-8 < x \le 10}}$

c.) Vigyázat! Most $a_n = \begin{cases} 0, & \text{ha } n \text{ páratlan} \\ \dfrac{(-1)^{n/2}}{\frac{n}{2}\, 9^{n/2}}, & \text{ha } n \text{ páros} \end{cases}$

$\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n|}$-nel lehetne dolgozni, de jobb, ha helyettesítéssel visszavezetjük a.)-ra.

$z := (x-1)^2$ esetén: $\displaystyle\sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\, 9^n}\, z^n$

KT: $-9 < z \le 9$ (lásd a.)) $\implies$ $-9 < (x-1)^2 \le 9$ adódik

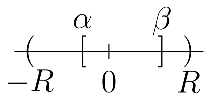
$\implies$ KT: $\underline{\underline{|x-1| \le 3}}$

3.2. A hatványsor tulajdonságai

Az előző fejezet T_3, T_4, T_5 tételei a hatványsor konvergencia tartományáról és abszolút konvergencia tartományáról szólnak. Ezeket itt nem ismételjük meg.

(T) $\boxed{\text{Ha } [\alpha,\beta] \subset (-R,R)\text{, akkor a } \sum a_k\, x^k \text{ hatványsor egyenletesen konvergens } [\alpha,\beta]\text{-n.}}$

(B) $q := \max\{|\alpha|, |\beta|\} < R$



$$|a_k|\,|x|^k \underset{x\in[\alpha,\beta]}{\le} |a_k|\, q^k$$

és a $\displaystyle\sum_{0}^{\infty} |a_k|\, q^k$ sor konvergens (mivel a hatványsor a konvergencia tartomány bármely belső pontjában abszolút konvergens). Így a Weierstrass kritérium értelmében fennáll az egyenletes konvergencia az $[\alpha,\beta]$ intervallumon. Ha a hatványsor R-ben is konvergens, akkor $\beta = R$ megengedett.

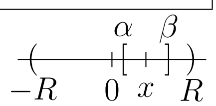
■

•••

Az egyenletes konvergencia következményei:

(T_1) $\boxed{f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \text{ folytonos } \forall\, x \in (-R,R)\text{-re}}$

(B) $\exists\, [\alpha,\beta]$ $\forall\, x$-hez: $-R < \alpha < x < \beta < R$



$[\alpha,\beta] \subset (-R,R)$ miatt a hatványsor egyenletesen konvergens $[\alpha,\beta]$-n, $a_k x^k$ folytonos mindenütt $\implies$ f is folytonos x-ben. (A függvénysorok T_1^* tétele miatt.)

■

(T1a) Ha a hatványsor R-ben is konvergens, akkor összegfüggvénye e helyen balról folytonos.

(Tehát $f(R) = \sum\limits_{0}^{\infty} a_k\, R^k = \lim\limits_{x \to R-0} f(x)$) $\qquad (\neg B)$

Hasonló tétel mondható ki $(-R)$-re is.

(T2) $f(x) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k, \quad x \in (-R, R)\,; \quad [a, b] \subset (-R, R)$

$$\int\limits_a^b \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k \right) \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_a^b a_k\, x^k\, \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, \left. \frac{x^{k+1}}{k+1} \right|_a^b$$

(B) $a_k\, x^k$ folytonos $[a, b]$-n (sőt mindenütt) és $[a, b] \subset (-R, R)$ miatt $[a, b]$-ben a sor egyenletesen konvergens $\Longrightarrow \ \ldots \quad$ (T_2^* tétel)

■

(T3) A hatványsor összegfüggvénye a konvergenciaintervallumának bármely belső x pontjában differenciálható, mégpedig tagonként:

I. azaz $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k a_k\, x^{k-1}$ (újfent hatványsor)

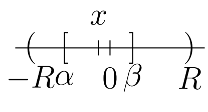
II. és a két sor konvergenciasugara megegyezik.

(B) Először a II. állítást látjuk be, mivel a tagonkénti deriválhatósághoz $\sum\limits^{\infty} f_n'$ egyenletes konvergenciája kell.

$$\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|n\, a_n|} = \overline{\lim}\ \underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{\sqrt[n]{n}}\, \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim}\ \sqrt[n]{|a_n|} \quad \text{miatt} \quad R_1 = R_2\ (= R)$$

Felhasználtuk, hogy $\sum\limits^{\infty} n\, a_n\, x^{n-1}$ és $\sum\limits^{\infty} n\, a_n\, x^n$ együtt konvergens illetve divergens, ugyanis a második sor az első sornak konstansszorosa (x-szerese).

I.:



x-hez $\exists\ [\alpha, \beta] \subset (-R, R)$, hogy $x \in (\alpha, \beta)$

$\sum\limits^{\infty} k a_k\, x^{k-1}$ is hatványsor $\implies$ $[\alpha,\beta] \subset (-R,R)$-en egyenletesen konvergens; $\sum\limits^{\infty} a_k\, x^k$ is konvergens $[\alpha,\beta]$-n és $a_k\, x^k \in C^1_{[\alpha,\beta]}$ $\implies$ tagonként deriválható, azaz

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, x^k = \sum_{k=1}^{\infty} k\, a_k\, x^{k-1} \,. \qquad (T_3^* \text{ tétel})$$

■

Az előző tétel következménye:

Ⓣ A hatványsor összegfüggvénye a konvergenciatartomány bármely belső pontjában *akárhányszor* deriválható (mégpedig tagonként) és a konvergenciasugár ugyanaz marad mindegyik derivált sor esetén.

Ⓜ x_0 középpontú hatványsorokra hasonló tételek igazak.

A fentiekből látható, hogy a hatványsor a konvergenciatartomány belsejében ugyanúgy differenciálható és integrálható, mint a polinomok.

•••

Példák:

Pl. $\boxed{\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} := f(x) = ?}$

Vagyis adjuk meg az f összegfüggvényt véges sok elemi függvény segítségével és határozzuk meg a konvergencia tartományt (az f összegfüggvény értelmezési tartományát)!

$R_1 = 1$, mert $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1 = \frac{1}{R_1}$

$$x = 1 : \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \ \text{div.}, \qquad\qquad x = -1 : \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} \ \text{konv.}$$

Tehát $D_f = H = [-1,1)$. Legyen $[0\,,\,x] \subset (-1\,,\,1)$

$$\int_0^x f'(x)\,\mathrm{d}x \overset{N-L.}{=} f(x) - \underbrace{f(0)}_{=0} = f(x) = \int_0^x \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} \right) \mathrm{d}x =$$

$|x| < 1$, $[0,x]$-ben egyenletes a konvergencia

$$= \int_0^x \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} k \frac{x^{k-1}}{k}}_{\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = \frac{1}{1-x}} \, \mathrm{d}x = \int_0^x \frac{1}{1-x} \, \mathrm{d}x = -\ln(1-x) \qquad (R_2 = R_1 = 1)$$

Tehát $f(x) = -\ln(1-x)$, ha $x \in [-1,1)$.
(T_{1a} tétel miatt $x = -1$-re is fennáll az egyenlőség.)

Pl. Adja meg zárt alakban a $\Phi(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n\, x^{n-2}$ függvényt!
Határozza meg Φ értelmezési tartományát!

$R = 1$, mert... ; $x = \pm 1$-ben divergens (behelyettesítéssel)

$$\Phi(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n\, x^{n-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)\, x^k; \qquad \Phi(0) = 2$$

Ha $x \neq 0$:

$$\Phi_1(x) := x \cdot \Phi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)\, x^{k+1}$$

$|x| < 1$ esetén $[0,x] \subset (-1,1)$ (vagy $[x,0] \subset (-1,1)$) miatt szabad tagonként integrálni:

$$\int_0^x \Phi_1(x)\, \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2) \int_0^x x^{k+1}\, \mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+2} = \frac{x^2}{1-x}$$

$$\Phi_1(x) = \left(\frac{x^2}{1-x} \right)' = \cdots = \frac{x(2-x)}{(1-x)^2} \quad \longrightarrow \quad \Phi(x) = \frac{2-x}{(1-x)^2}\,; \qquad |x| < 1$$

3.3. Analitikus függvény

D f x_0-ban *analitikus*, ha $K_{x_0,R}$-ben $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\, (x-x_0)^k$, tehát egy konvergens hatványsor összegfüggvénye.

D f analitikus (α,β)-n, ha $\forall$ pontjában az.

•••

Mi a kapcsolat egy analitikus függvény és az a_k együtthatók között?

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots$$

$$f(x_0) = a_0$$

$$f'(x) = a_1 + 2\,a_2(x-x_0) + 3\,a_3(x-x_0)^2 + \cdots + na_n(x-x_0)^{n-1} + \cdots$$

$$f'(x_0) = a_1$$

$$f''(x) = 2\,a_2 + 3\cdot 2\,a_3(x-x_0) + \cdots + n\,(n-1)\,a_n\,(x-x_0)^{n-2} + \cdots$$

$$f''(x_0) = 2\,a_2$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$f^{(n)}(x_0) = n!\,a_n$$

Tehát $\boxed{a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}}$

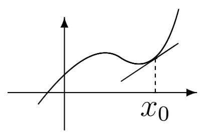
Ⓣ Ha f analitikus x_0-ban, azaz

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k \quad K_{x_0,R}\text{-ben } (R>0)\,, \quad \text{akkor} \qquad a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,,$$

vagyis analitikus függvény egyértelműen fejthető x_0 középpontú hatványsorba, azaz

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\,(x-x_0)^k$$

4. Taylor polinom



Tulajdonképpen már találkoztunk vele:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) = T_1(x)$$

(Az érintő egyenes $\equiv$ elsőrendű Taylor polinom)

Milyen tulajdonságokkal rendelkezik?

$T_1(x_0) = f(x_0)$ és $T_1'(x_0) = f'(x_0)$: T_1 legalább elsőrendben érinti f-et.

Ⓓ Az f és g legalább n-szer differenciálható függvények *legalább n-edrendben* érintik egymást x_0-ban, ha

$$f^{(i)}(x_0) = g^{(i)}(x_0)\,, \quad 0 \le i \le n$$

Ⓓ Az f és g legalább $(n+1)$-szer differenciálható függvények *pontosan n-edrendben* érintik egymást x_0-ban, ha

$$f^{(i)}(x_0) = g^{(i)}(x_0)\,, \quad 0 \le i \le n \quad \text{és} \quad f^{(n+1)}(x_0) \ne g^{(n+1)}(x_0)\,.$$

Pl.

$f(x) = \sin x$	$g(x) = x - \dfrac{x^3}{6}$	$f(0) = g(0) = 0$
$f'(x) = \cos x$	$g'(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2}$	$f'(0) = g'(0) = 1$
$f''(x) = -\sin x$	$g''(x) = -x$	$f''(0) = g''(0) = 0$
$f'''(x) = -\cos x$	$g'''(x) = -1$	$f'''(0) = g'''(0) = -1$
$f^{(4)}(x) = \sin x$	$g^{(4)}(x) = 0$	$f^{(4)}(0) = g^{(4)}(0) = 0$
$f^{(5)}(x) = \cos x$	$g^{(5)}(x) = 0$	$f^{(5)}(0) \ne g^{(5)}(0)$

Pontosan negyedrendben érintkeznek.

●●●

Legyen f legalább n-szer differenciálható x_0-ban! Keressük azt a legfeljebb n-edfokú $T_n(x)$ polinomot, amely x_0-ban legalább n-edrendben érinti f-et.

$$T_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_k(x-x_0)^k + \cdots + a_n(x-x_0)^n$$

$$T_n(x_0) = a_0 = f(x_0)$$
$$T_n'(x) = a_1 + 2\,a_2(x-x_0) + \cdots + k\,a_k(x-x_0)^{k-1} + \cdots + n\,a_n(x-x_0)^{n-1}$$
$$T_n'(x_0) = a_1 = f'(x_0)$$
$$T_n''(x) = 2\,a_2 + 3\cdot 2a_3(x-x_0) + \cdots + k(k-1)a_k(x-x_0)^{k-2} + \cdots + n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}$$
$$T_n''(x_0) = 2\,a_2 = f''(x_0)$$
$$T_n'''(x) = 3!\,a_3 + \cdots + n(n-1)(n-2)a_n(x-x_0)^{n-3}$$
$$T_n'''(x_0) = 3!\,a_3 = f'''(x_0)$$
$$\vdots$$
$$T_n^{(k)}(x_0) = k!\,a_k = f^{(k)}(x_0)$$
$$\vdots$$
$$T_n^{(n)}(x_0) = n!\,a_n = f^{(n)}(x_0)$$

Tehát $$\boxed{a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad k = 0, 1, \ldots, n\,.}$$

Ezzel a következő tételt bizonyítottuk be:

Ⓣ Legyen f legalább n-szer differenciálható x_0-ban! Egyetlen olyan legfeljebb n-edfokú $T_n(x)$ polinom van, amely x_0-ban legalább n-edrendben érinti f-et, mégpedig

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Ⓓ A legalább n-szer differenciálható f függvény x_0 bázispontú n-edrendű Taylor polinomja:

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Ⓜ Egy m-edfokú polinom $T_n(x)$ Taylor polinomja $m \leq n$ esetén önmaga :
$P_m(x) = T_n(x)$, esetleg más hatványok szerint felírva.
Ugyanis egyetlen n-edrendben érintő polinom van és önmaga ilyen.

●●●

Látni fogjuk, hogy a legtöbb elemi függvény esetén

$$\lim_{n\to\infty} T_n(x) = f(x)\,,$$

azaz

$$\lim_{n\to\infty} f(x) - T_n(x) = 0\,.$$

Ezért az $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ maradéktag vizsgálata szükséges. (Megjegyezzük, hogy nem minden függvény esetén tart a Taylor polinom a függvényhez, ha $x \neq x_0$.)

A következő tétel $R_n(x)$ nagyságrendjét mutatja.

Ⓣ Legyen f legalább n-szer differenciálható K_{x_0}-ban. Ekkor

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0;$$

Tehát $R_n(x) = o\left((x-x_0)^n\right)$ az x_0-ban.

Ⓜ A közelítés jóságát mutatja a tétel.

Ⓑ

$$\lim_{x\to x_0} \frac{R_n(x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-T_n(x)}{(x-x_0)^n} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)-T_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}} \overset{\text{L'H}}{=}$$

$$\overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f''(x)-T_n''(x)}{n(n-1)(x-x_0)^{n-2}} \overset{\text{L'H}}{=} \underset{n \text{ lépés után}}{\cdots} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n)}(x)-T_n^{(n)}(x)}{n!\,(x-x_0)^{n-n}} = \frac{0}{n!} = 0$$

(Az utolsó tört kivételével a törtek $\dfrac{0}{0}$ alakúak, ezért alkalmazhattuk a L'Hospital szabályt.)

■

Ⓜ Ha $T_n(x)$ helyett másik polinomot tekintünk, akkor ez az állítás nem igaz.

Lagrange-féle alakban felírt maradéktag

Ⓣ Ha f legalább $(n+1)$-szer differenciálható $K_{x_0,\delta}$- ban és $x \in K_{x_0,\delta}$, akkor $\exists\, \xi \in (x_0, x)$ (ill. $\xi \in (x, x_0)$), hogy

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-x_0)^{n+1}.$$

Ⓜ Tehát $f(x) = T_n(x) + \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\,(x-x_0)^{n+1}$ $\qquad(\neg\text{B})$

●●●

(Pl.) $\boxed{f(x) = \sin x \approx T_5(x) = ? \qquad x \in [0\,,\,0.1],\ \ x_0 = 0 \quad |H| < ?}$

$f'(x) = \cos x\,;\qquad f''(x) = -\sin x\,;\qquad f'''(x) = -\cos x$
$f^{(4)}(x) = \sin x\,;\qquad f^{(5)}(x) = \cos x\,;\qquad f^{(6)}(x) = -\sin x\,;\qquad f^{(7)}(x) = -\cos x$

$f(0) = 0;\quad f'(0) = 1;\quad f''(0) = 0;\quad f'''(0) = -1;\quad f^{(4)}(0) = 0;\quad f^{(5)}(0) = 1;\quad f^{(6)}(0) = 0$

Ennek megfelelően: $\qquad T_5(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}$

$$H = R_5(x) = \frac{-\sin\xi}{6!}\,x^6\,; \qquad\qquad |H| \underset{0 \le x \le 0.1}{\underset{\uparrow}{\le}} \frac{1}{6!}\cdot(0.1)^6$$

De most $T_5(x) \equiv T_6(x)$ és így az alábbi is igaz:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{-\cos\xi}{7!}\,x^7\,; \qquad\qquad |H| \le \frac{1}{7!}\cdot(0.1)^7$$

5. Taylor sorok

Ⓓ Legyen f akárhányszor differenciálható x_0-ban. Ekkor a formálisan előállítható

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \cdots := T(x)$$

hatványsort az f függvény x_0 alapponthoz tartozó Taylor sorának nevezzük.
$x_0 = 0$ esetén:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k = f(0) + f'(0)\, x + \frac{f''(0)}{2!}\, x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n + \cdots$$

Ezt MacLaurin sornak is hívják.

Tehát egy akárhányszor differenciálható f függvényhez az x_0- ban hozzárendeltük a $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$ hatványsort, jelben:

$$f(x) \rightsquigarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k = T(x)$$

Felvetődik a kérdés, hogy

1.) Milyen x-re konvergens a kapott sor? (H=?)

2.) Milyen kapcsolat van f és T között?
Látni fogjuk, hogy bizonyos feltételek teljesülése esetén $f(x) = T(x)$, $x \in H$. (Vagyis ilyenkor az f függvény helyett a T hatványsorával dolgozhatunk.) Az alábbi példa mutatja, hogy előfordulhat az is, hogy $f(x) = T(x)$ nem áll fenn, kivéve az x_0 alappontot.

Pl. $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Belátható, hogy $\forall\, n$-re $\exists\, f^{(n)}(0) = 0$. Így $T(x) \equiv 0$. Tehát $T(0) = f(0)$, de más x-re nem áll fenn az egyenlőség, hiszen $f(x) \neq 0$, ha $x \neq 0$.

•••

Néhány Taylor sorfejtés:

A következő példáknál azt használjuk ki, hogy a hatványsor összegfüggvényének Taylor sora önmaga. Ha tehát egy függvényt fel tudunk írni hatványsor összegfüggvényeként, akkor az csak a Taylor sora lehet.

Pl. $\boxed{f(x) = x^2 + x + 1\,, \qquad x_0 = 2}$

$$\underbrace{x^2+x+1}_{x_0=0 \text{ körüli T. sor}} = \underbrace{(x-2)^2+5(x-2)+7}_{x_0=2 \text{ körüli Taylor sor}} = T_2(x) = T_3(x) = T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(2)}{k!}\,(x-2)^k$$

Pl. $\boxed{f(x) = \dfrac{1}{1-x}}$

$f(x) = \dfrac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n + \cdots \qquad$: geometriai sor, $|x| < 1$-re konvergens

Tehát $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ analitikus $x_0 = 0$-ban. De $x = 1$ kivételével, ahol nem értelmezett, minden pontban analitikus. (Felírható az adott pontra támaszkodó hatványsor összegfüggvényeként és $R > 0$)

Pl. $x_0 := 5$

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \frac{-1}{x-1} = \frac{-1}{(x-5)+4} = \frac{-1}{4}\,\frac{1}{1-\frac{-(x-5)}{4}} \left(= \frac{a}{1-q}\right) =$$

$$= \frac{-1}{4}\left(1 - \left(\frac{x-5}{4}\right) + \left(\frac{x-5}{4}\right)^2 - \left(\frac{x-5}{4}\right)^3 + \cdots\right)$$

KT: $\quad |q| = \left|-\dfrac{x-5}{4}\right| = \dfrac{|x-5|}{4} < 1 \quad \longrightarrow \quad |x-5| < 4\,, \quad R = 4$

(HF. $x_0 = -2$)

Pl. $\boxed{f(x) = \dfrac{1}{x^2-3x+2}\,, \qquad x_0 = -2 \text{ pontra támaszkodó Taylor sora?}}$

$$f(x) = \frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} = \cdots = \frac{-1}{x-1} + \frac{1}{x-2}$$

$$-\frac{1}{x-1} = \frac{1}{1-x} = \frac{1}{3-(x+2)} = \frac{1}{3}\,\frac{1}{1-\frac{x+2}{3}} =$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 + \left(\frac{x+2}{3}\right) + \left(\frac{x+2}{3}\right)^2 + \left(\frac{x+2}{3}\right)^3 + \cdots\right)$$

$$KT_1: \ \left|\frac{x+2}{3}\right| < 1 \longrightarrow |x+2| < 3\,, \quad R_1 = 3$$

$$\frac{1}{x-2} = \frac{1}{(x+2)-4} = -\frac{1}{4}\,\frac{1}{1-\frac{x+2}{4}} = -\frac{1}{4}\left(1 + \left(\frac{x+2}{4}\right) + \left(\frac{x+2}{4}\right)^2 + \left(\frac{x+2}{4}\right)^3 + \cdots\right)$$

$$KT_2: \ \left|\frac{x+2}{4}\right| < 1 \longrightarrow |x+2| < 4\,, \quad R_2 = 4$$

$$\frac{1}{x^2-3x+2} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k\,(x+2)^k \qquad a_0 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$a_1 = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}$$

$$\vdots$$

$$a_k = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^k - \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^k$$

$$KT: \ |x+2| < 3 \quad (\text{közös rész: } KT_1 \cap KT_2)\,, \quad R = 3$$

Pl. $\displaystyle \frac{\mathrm{d}^{100}}{\mathrm{d}x^{100}}\left(\frac{1}{x^2-3x+2}\right)\bigg|_{x=-2} = ?$

$$f(x) := \frac{1}{x^2-3x+2}$$

Az előző példában ennek a függvénynek a Taylor sorát írtuk fel az $x_0 = -2$ bázisponttal. Tudjuk, hogy $a_k = \dfrac{f^k(x_0)}{k!}$, így az előző sorfejtésből:

$$a_{100} = \frac{f^{(100)}(-2)}{100!} \quad \Longrightarrow \quad f^{(100)}(-2) = 100!\left(\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{100} - \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{100}\right)$$

Pl. $\boxed{f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}\,, \qquad x_0 = 0}$

$$f(x) = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k}$$

Geometriai sor: $a = 1\,,\ \ q = -x^2$

KT: $\quad |q| = |-x^2| < 1 \Longrightarrow |x|^2 < 1 \Longrightarrow |x| < 1\,, \quad R = 1$

Házi feladat:
Írja fel az $f(x) = \dfrac{1}{1+3x^4}$ függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor sorfejtését!

Pl. $\boxed{f(x) = \operatorname{arctg} x\,, \qquad x_0 = 0 \text{ bázispontú Taylor sora?}}$

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots\,; \qquad q := -x^2$$

$$\text{KT.:} \quad |q| = \left|-x^2\right| < 1 \longrightarrow |x| < 1\,, \quad R = 1$$

$$\int\limits_0^x (\operatorname{arctg} x)'\,\mathrm{d}x \overset{N-L.}{=} \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} 0 = \operatorname{arctg} x = \int\limits_0^x \left(1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots\right)\,\mathrm{d}t =$$

$$= t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \cdots \Big|_0^x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$$

Tehát

T $\boxed{\operatorname{arctg} x = x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \cdots = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}\,, \qquad |x| \le 1}$, így $R = 1$

KT.: $|x| < 1$-ben biztosan konvergens. Sőt: $x = \pm 1$-ben is, mert

$$x = 1: \qquad 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} \quad \text{konvergens (Leibniz típusú)}$$

A sor összege a T_{1a} tétel miatt $= \operatorname{arctg} 1 = \dfrac{\pi}{4}$, tehát

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

Hasonlóan mutatható meg a konvergencia $x = -1$-re.

Pl. $\operatorname{arctg} 0{,}1 \approx T_5(0,1) = 0{,}1 - \dfrac{0{,}1^3}{3} + \dfrac{0{,}1^5}{5}\,, \qquad |H| < \dfrac{0{,}1^7}{7}$ (Leibniz sor)

Pl. $\boxed{f(x) = \ln(1+x)\,, \qquad x_0 = 0}$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots \quad |x| < 1\,, \quad R = 1$$

Elvégezve az integrálást $[\,0\,,\,x\,]$- en:

$$\ln(1+x) = \int\limits_0^x \left(1 - t + t^2 - t^3 + \cdots\right)\,\mathrm{d}t = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots\,,$$

Ez a sor $x = 1$-ben is konvergens, mert Leibniz sor. T_{1a} tétel miatt értéke:

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Tehát a kapott eredmény:

$$\text{T} \quad \boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}, \qquad x \in (-1, 1]}, \quad R = 1$$

Az előző sorfejtésből $x \to -x$ helyettesítéssel adódik:

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots \quad , \quad R = 1$$

A két sorfejtés segítségével már kapható egy minden argumentumértékre konvergens sorfejtés is:

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots , \qquad |x| < 1 , \quad R = 1$$

$$\Big(\ln z = ? \qquad \ln z := \ln \frac{1+x}{1-x}; \qquad z = \frac{1+x}{1-x}\text{-ből} \qquad |x| < 1 \text{ adódik mindig} \Big)$$

$$\text{Pl.} \quad \boxed{f(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)^2, \qquad x_0 = 0}$$

$$f(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots\right) =$$

$$= 1 + 2x + 3x^2 + \cdots n\, x^{n-1} + \cdots ,$$

ha $|x| < 1$, $R = 1$. (A hatványsor tagonként deriválható.) A végpontokban ($x = \pm 1$) divergens a sor, mert az általános tag nem tart 0-hoz.

Házi feladat:

$$\boxed{g(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)^3, \qquad x_0 = 0}$$

5.1. Függvény és Taylor sorának megegyezése

$$f(x) \rightsquigarrow T(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k$$

$f(x) = T(x)$ *-ről mit mondhatunk általánosságban?*

Szükséges és elégséges tétel $f(x) = T(x)$ fennállására:

Ⓣ $T_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k \xrightarrow[\infty]{n} f(x)$ (azaz $f(x) = T(x)$) akkor és csak akkor, ha

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\, x^{n+1} \xrightarrow[\infty]{n} 0$$

Ⓓ A $g_0, g_1, \dots, g_n, \dots$ függvények a $D = \bigcap D_{g_n}$ halmazon *egyenletesen korlátosak*, ha

$\exists\, K \in \mathbb{R}: \quad |g_n(x)| \le K, \quad$ ha $x \in D,\ n \in \mathbb{N}$ (van közös korlát)

Pl. $\sin x,\ 2\sin 2x,\ 3\sin 3x, \dots, n \sin nx, \dots$ egyenként korlátosak, de nem egyenletesen korlátosak.

Pl. $\cos x,\ \cos 4x,\ \cos 9x, \dots, \cos n^2 x, \dots$ egyenletesen korlátosak.

Elégséges tétel $f(x) = T(x)$ fennállására:

Ⓣ Ha f akárhányszor differenciálható $(-R, R)$-en és $f,\ f',\ f'', \dots, f^{(n)}, \dots$ deriváltfüggvények egyenletesen korlátosak itt, akkor

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k \qquad x \in (-R, R)\text{-en.}$$

Ⓜ x_0 bázispontra hasonló tétel mondható ki $(x_0 - R, x_0 + R)$-re.

Ⓑ Már láttuk, hogy

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k}_{T_n(x) = s_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\, x^{n+1}}_{R_n(x) \text{ Lagrange-féle alakja}}$$

Ezért:

$$\underbrace{|f(x) - T_n(x)|}_{=|s(x) - s_n(x)|} = |R_n(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\, x^{n+1} \right| = \frac{\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|}{(n+1)!}\, |x|^{n+1} \le K\, \frac{R^{n+1}}{(n+1)!} := a_n$$

Mivel $a_n \xrightarrow[\infty]{n} 0$ (I. félévi anyagban szerepelt: $\dfrac{a^n}{n!} \xrightarrow[\infty]{n} 0$), ezért

$$|f(x) - T_n(x)| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad n > N(\varepsilon) \implies T_n(x) \to f(x)\,, \quad \text{azaz} \quad T(x) = f(x).$$

■

●●●

További fontos Taylor sorfejtések:

Pl. $f(x) = \boxed{\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \cdots} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,;$ $\boxed{x \in \mathbb{R}}$

Ui.:
$$\begin{array}{ll}
f(x) = \sin x & f(0) = 0 \\
f'(x) = \cos x & f'(0) = 1 \\
f''(x) = -\sin x & f''(0) = 0 \\
f'''(x) = -\cos x & f'''(0) = -1 \\
\hline
f^{(4)}(x) = \sin x & \downarrow \text{Innen periodikusan ismétlődik}
\end{array}$$

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \cdots = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots$$

A deriváltak $(-\infty, \infty)$-en egyenletesen korlátosak, ezért $\forall\ x$-re: $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \cdots$.

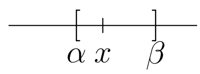
Pl. $f(x) = \boxed{\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} - \dfrac{x^6}{6!} + \cdots} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!};$ $\boxed{x \in \mathbb{R}}$

Az előző példához hasonlóan:
$$\left.\begin{array}{ll}
f(x) = \cos x & f(0) = 1 \\
f'(x) = -\sin x & f'(0) = 0 \\
f''(x) = -\cos x & f''(0) = -1 \\
f'''(x) = \sin x & f'''(0) = 0
\end{array}\right\} \text{a deriváltak egyenletesen korlátosak}$$
$$\begin{array}{ll}
\hline
f^{(4)}(x) = \cos x & \downarrow \text{Innen periodikusan ismétlődik}
\end{array}$$

Pl. $f(x) = \boxed{e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^4}{4!} + \cdots} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!};$ $\boxed{x \in \mathbb{R}}$

$f^{(k)}(x) = e^x; \quad f^{(k)}(0) = 1 \quad k \in \mathbb{N}$

Konvergencia: $f^{(k)}(x) = e^x$ $x \in \mathbb{R}$-en nem korlátos, de tetszőleges $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$-en már igen. $\left|f^{(k)}(x)\right| \le e^\beta$. Tehát itt a deriváltak egyenletesen korlátosak, így a tétel alapján $f(x) = T(x)$ $\forall\ x \in \mathbb{R}$-re.



Pl. $f(x) = \boxed{\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$; $\boxed{x \in \mathbb{R}}$

$\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$

$$\left.\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \qquad x \in \mathbb{R} \\ e^{-x} &= 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \qquad x \in \mathbb{R} \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \ldots$$

Pl. $f(x) = \boxed{\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$; $\boxed{x \in \mathbb{R}}$

$\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) = \cdots$

●●●

Példák Taylor sorfejtésre:

Pl. $\boxed{f(x) = \sin x \cdot \cos x\,, \qquad x_0 = 0}$

$$f(x) = \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x = \frac{1}{2}\left(2x - \frac{1}{3!}(2x)^3 + \frac{1}{5!}(2x)^5 - \frac{1}{7!}(2x)^7 + \cdots\right) \qquad x \in \mathbb{R}$$

Az alábbi néhány példa az

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} + \cdots\,, \qquad u \in \mathbb{R}$$

sorfejtésre támaszkodik.

Pl. $\boxed{f(x) = e^{x^2}\,, \qquad x_0 = 0}$

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{1}{2!}x^4 + \frac{1}{3!}x^6 + \frac{1}{4!}x^8 + \cdots\,, \qquad x \in \mathbb{R} \qquad \left(u = x^2\right)$$

Pl. $\boxed{f(x) = e^{-x^2}\,, \qquad x_0 = 0}$

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{1}{2!}x^4 - \frac{1}{3!}x^6 + \frac{1}{4!}x^8 - \cdots\,, \qquad x \in \mathbb{R} \qquad \left(u = -x^2\right)$$

A valószínűségszámításban találkozunk az $f(x) = e^{-x^2}$ Gauss görbével.

Pl. $\boxed{f(x)=\sqrt{e^x}\,, \qquad x_0=0}$

$$\sqrt{e^x}=e^{\frac{x}{2}}=1+\frac{x}{2}+\frac{1}{2!}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{x}{2}\right)^3+\cdots\,, \qquad x\in\mathbb{R} \qquad \left(u=\frac{x}{2}\right)$$

Pl. $\boxed{f(x)=e^{3x^2}\,, \qquad x_0=0}$

$$e^{3x^2}=1+3x^2+\frac{1}{2!}3^2x^4+\frac{1}{3!}3^3x^6\cdots\,, \qquad x\in\mathbb{R} \qquad \left(u=3x^2\right)$$

Pl. $\boxed{f(x)=e^{3x}\,, \qquad x_0=0,\ \text{illetve}\ \ x_0=1}$

a.) $x_0=0:\quad e^{3x}=1+3x+\frac{1}{2!}(3x)^2+\frac{1}{3!}(3x)^3+\cdots\,, \qquad x\in\mathbb{R}$

b.) $x_0=1:\quad e^{3x}=e^{3(x-1)+3}=e^3e^{3(x-1)}=$

$$=e^3\left(1+3(x-1)+\frac{1}{2!}3^2(x-1)^2+\frac{1}{3!}3^3(x-1)^3+\cdots\right)\,, \qquad x\in\mathbb{R}$$

Pl. Adja meg az

$$f(x)=\frac{1}{7+x}$$

függvény Taylor sorát és annak konvergenciatartományát, ha

a.) $x_0=0$

b.) $x_0=2$

a.)

$$\frac{1}{7+x}=\frac{1}{7}\,\frac{1}{1-\frac{-x}{7}}=\frac{1}{7}\left(1-\frac{x}{7}+\left(\frac{x}{7}\right)^2-\left(\frac{x}{7}\right)^3+\cdots\right)$$

$$a=\tfrac{1}{7}\,;\quad q=-\tfrac{x}{7}$$

$$\text{KT.: } |q|=\left|-\frac{x}{7}\right|=\frac{|x|}{7}<1 \implies |x|<7\,, \qquad R=7$$

b.)

$$\frac{1}{7+x}=\frac{1}{(x-2)+9}=\frac{1}{9}\,\frac{1}{1-\frac{-(x-2)}{9}}=\frac{1}{9}\left(1-\frac{x-2}{9}+\left(\frac{x-2}{9}\right)^2-\left(\frac{x-2}{9}\right)^3+\cdots\right)$$

$$a=\tfrac{1}{9}\,;\quad q=-\tfrac{x-2}{9}$$

$$\text{KT.: } |q|=\left|-\frac{x-2}{9}\right|=\frac{|x-2|}{9}<1 \implies |x-2|<9 \qquad (x\in(-7,11))$$

$$R=9$$

Pl. Fejtse $x_0 = 0$ bázispontú Taylor sorba az

$$f(x) = \frac{2x}{2 - x^2}$$

függvényt! Konvergenciatartomány?

$$\frac{1}{2-x^2} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\dfrac{x^2}{2}} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{x^2}{2} + \left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + \left(\frac{x^2}{2}\right)^3 + \cdots\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right)^k = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}\,x^{2k}$$

KT.: $\left|\dfrac{x^2}{2}\right| < 1$, tehát $|x| < \sqrt{2}$, azaz $R = \sqrt{2}$, $H = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

Ennek a sorfejtésnek a felhasználásával:

$$f(x) = 2x\,\frac{1}{2-x^2} = 2x\,\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}\,x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^k}\,x^{2k+1},$$

$$|x| < \sqrt{2}, \quad R = \sqrt{2}, \quad H = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

Pl. a.) Határozza meg a

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k+1}{k!}\,x^{2k}$$

sor konvergenciatartományát és összegfüggvényét!

b.) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k+1}{k!} = ?$

a.) $f(x) := \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k+1}{k!}\,x^{2k}$ $\qquad R = \infty$, mert...

$$f_1(x) := \int_0^x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k+1}{k!}\,x^{2k}\,\mathrm{d}x \underset{\text{egyenl. konv.}}{=} \sum_{k=0}^{\infty}\int_0^x \frac{2k+1}{k!}\,x^{2k}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k+1}{k!}\,\frac{x^{2k+1}}{2k+1}\Bigg|_0^x \underset{x \neq 0}{=} x\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x^2)^k}{k!} = x\mathrm{e}^{x^2} \quad \text{és} \quad f_1(0) = 0$$

Tehát $f_1(x) = x\,\mathrm{e}^{x^2}\ , \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad f(x) = \left(x\,\mathrm{e}^{x^2}\right)' = \mathrm{e}^{x^2} + 2x^2\,\mathrm{e}^{x^2}\ , \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

b.)

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{2k+1}{k!} = f(1) = \mathrm{e} + 2\mathrm{e} = 3\mathrm{e}$$

Pl. $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,5^n} = ?}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\frac{1}{5})^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\Bigg|_{x=\frac{1}{5}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \int_0^x \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}\right) \mathrm{d}x = \int_0^x \left(\sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}\right) \mathrm{d}x =$$

$$= \int_0^x \frac{1}{1-x}\,\mathrm{d}x = -\ln(1-x)\ , \qquad \text{ahol } |x| < 1$$

Ezért $x = \dfrac{1}{5}$ behelyettesíthető:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,5^n} = -\ln\left(1 - \frac{1}{5}\right) = \ln\frac{5}{4}$$

Pl. $\boxed{\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} = ?}$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} = \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} + \cdots\ ; \qquad \operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots\ , \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

Ezért $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} = \operatorname{ch} 1 - 1 - \frac{1}{2!}$

Pl. $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}\,x^n = ?\ , \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!\,3^n} = ?}$

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!}\,x^n$$

A hányadoskritériummal belátható, hogy $R = \infty$. Azt is tudjuk, hogy f-re folytonos

függvényt kell kapnunk eredményül, mert f egy hatványsor összegfüggvénye.
Mivel $f(0) = 0$, azért $x \neq 0$-át vizsgáljuk.

$$x \cdot f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \mathrm{e}^x - 1 - x\,, \qquad R = \infty$$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1 - x}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

(L'Hospital szabállyal megmutatható, hogy f valóban folytonos $x = 0$-ban is.)

$f(x)$-be $x = \dfrac{1}{3}$ - ot helyettesítve kapjuk:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)!\, 3^n} = \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{3}} - 1 - \frac{1}{3}}{\frac{1}{3}}$$

Pl. $\boxed{\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k\,(-1)^k}{(2k)!} = ?}$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, x^{2k}}{(2k)!}\,, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k\,(-1)^k}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\,(\sqrt{2})^{2k}}{(2k)!} - 1 = \cos\sqrt{2} - 1$$

5.2. Binomiális sor

Az $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$ $(\alpha \neq -1)$ függvény $x_0 = 0$ pontra támaszkodó Taylor sora.
($\alpha = -1$ esetén geometriai sor összegfüggvényéről van szó.)

$$\begin{aligned} f(x) &= (1+x)^\alpha & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= \alpha(1+x)^{\alpha-1} & f'(0) &= \alpha \\ f''(x) &= \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} & f''(0) &= \alpha(\alpha-1) \\ &\vdots & &\vdots \\ f^{(k)}(x) &= \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k} & f^{(k)}(0) &= \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1) \end{aligned}$$

$$(1+x)^\alpha \rightsquigarrow T(x) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \cdots =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}\, x^k \;=\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k$$

M Ha $\alpha = n$ egész: $f^{(k)}(x) \equiv 0 \quad k \geq n+1$-re és

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{(n-k)\cdots 2\cdot 1}{(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

Ezért

D $\displaystyle\binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$ és $\displaystyle\binom{\alpha}{0} := 1$

Az eredményeink:

$\alpha = n \in \mathbb{N}^+ \;:\; (1+x)^\alpha = T(x) = T_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$ (Binomiális tétel)

$\alpha \neq n \;:\; (1+x)^\alpha \rightsquigarrow \boxed{T(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k}$

Kérdések:

1.) $R = ?$

2.) $f(x) = T(x)$ mikor igaz $(-R, R)$-en?

T $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \text{ esetén } R = 1}$

B $$a_k = \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

$$a_{k+1} = \binom{\alpha}{k+1} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(\alpha-k)}{(k+1)!} = \binom{\alpha}{k}\frac{\alpha-k}{k+1}$$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{\alpha-k}{k+1}\right| = \left|\frac{\frac{\alpha}{k}-1}{1+\frac{1}{k}}\right| \xrightarrow[\infty]{k} |-1| = 1 = \frac{1}{R} \implies R = 1$$

■

T $$\boxed{\underbrace{(1+x)^\alpha}_{f(x)} = \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k}_{T(x)} \qquad \forall\, x \in (-1, 1)\text{-re.}}$$

A végpontokban a konvergenciát külön meg kell vizsgálni.

Ⓑ f deriváltfüggvényei most nem egyenletesen korlátosak $\Longrightarrow$ tételünk nem alkalmazható. Ezért más módszerrel látjuk be az egyenlőséget. Megmutatjuk, hogy

$$\left(\frac{T(x)}{f(x)}\right)' \equiv 0 \implies \frac{T(x)}{f(x)} \equiv \text{konst.}, \text{ de } \quad \frac{T(0)}{f(0)} = \frac{1}{1} = 1 \implies T(x) \equiv f(x)$$

$$\left(\frac{T}{f}\right)' = \frac{T'f - Tf'}{f^2} = \frac{T'(1+x)^\alpha - T\cdot\alpha\cdot(1+x)^{\alpha-1}}{f^2} = \frac{(1+x)^{\alpha-1}}{(1+x)^{2\alpha}}(T'(1+x) - \alpha T) \equiv 0,$$

mert

$$T(x) = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \binom{\alpha}{k}x^k + \cdots$$

$$\alpha T(x) = \alpha + \alpha^2 x + \frac{\alpha^2(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \alpha\binom{\alpha}{k}x^k + \cdots$$

$$T'(x) = \alpha + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{2!}x^2 + \cdots + k\binom{\alpha}{k}x^{k-1} + (k+1)\binom{\alpha}{k+1}x^k + \cdots$$

$$xT'(x) = \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{1!}x^2 + \cdots + k\binom{\alpha}{k}x^k + \cdots$$

$$(1+x)T' - \alpha T = \sum_{k=0}^{\infty}\left((k+1)\binom{\alpha}{k+1} + k\binom{\alpha}{k} - \alpha\binom{\alpha}{k}\right)x^k$$

és itt

$$\left((k+1)\binom{\alpha}{k+1} + k\binom{\alpha}{k} - \alpha\binom{\alpha}{k}\right) = \binom{\alpha}{k}\left((k+1)\frac{\alpha-k}{k+1} + k - \alpha\right) = 0 \qquad \forall\ k\text{-ra}$$

■

Ⓜ Belátható, hogy $|x| < 1$-re végülis $\left|\binom{\alpha}{k}x^k\right| \searrow 0$, tehát k egy értékétől kezdődően a sor tagjai monoton csökkenően tartanak a 0-hoz. A 0-hoz tartás a konvergencia miatt nem kérdéses, csak a monoton csökkenés. (Mi nem bizonyítjuk általánosságban a monoton csökkenést.) Ezért, ha váltakozó előjelű a sor, akkor felírható egy konstans és egy Leibniz típusú sor összegeként. Ilyen esetben könnyű a hibaszámítás:

$$(1+x)^\alpha \approx \sum_{k=0}^{N}\binom{\alpha}{k}x^k = s_N \quad \text{közelítésnél} \qquad |H| < \left|\binom{\alpha}{N+1}x^{N+1}\right|$$

(Az első elhagyott tag majorálja a hibát, ha N értéke akkora, amelynél már teljesül a monoton csökkenés.)

Példák binomiális sorfejtésre

Pl. $\boxed{f(x) = \sqrt{1+x}\,, \qquad x_0 = 0}$

$$f(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}} = \binom{\frac{1}{2}}{0} + \binom{\frac{1}{2}}{1} x + \binom{\frac{1}{2}}{2} x^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{k} x^k =$$

$$= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})}{2!}x^2 + \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{3!}x^3 + \ \cdots\,,$$

Konvergenciasugár: $\quad R = 1$

Megmutatható, hogy $x > 0$-ra Leibniz típusú a sor ($x < 0$-nál nem!). Ezért, ha $x > 0$:

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x \quad \text{és} \quad |H| < \frac{1}{8}x^2$$

(Tehát $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$, ha $x > 0$)

Pl. $\sqrt{1{,}05} = (1+0{,}05)^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2}\,0{,}05 \quad |H| < \frac{1}{8}\,(0{,}05)^2$

Hasonlóan megmutatható, hogy $k \in \mathbb{N}^+$-ra: $\sqrt[k]{1+x} \approx 1 + \frac{x}{k} = T_1(x)$

Pl. $\boxed{\sqrt[5]{34} \approx ?}$

$\sqrt[5]{34} = (1+33)^{\frac{1}{5}}$ nem jó, mert $x = 33 > 1$

De $\sqrt[5]{34} = \sqrt[5]{32\frac{34}{32}} = 2\sqrt[5]{\frac{34}{32}} = 2\left(1 + \frac{1}{16}\right)^{\frac{1}{5}} = 2\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{5}}{k}\left(\frac{1}{16}\right)^k \underset{\text{pl.}}{\approx} 2\sum_{k=0}^{3}\binom{\frac{1}{5}}{k}\left(\frac{1}{16}\right)^k$

Leibniz sor (belátható): $\qquad |H| < 2\left|\binom{\frac{1}{5}}{4}\left(\frac{1}{16}\right)^4\right|$

Pl. $\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2+x^2}}\,, \qquad x_0 = 0 \ \text{ bázispontú Taylor sor?}}$

$$\frac{1}{\sqrt{2+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{\sqrt{1+\frac{x^2}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + \left(\frac{x^2}{2}\right)\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{k}\left(\frac{x^2}{2}\right)^k$$

$$\text{konvergenciasugár:} \quad \left|\frac{x^2}{2}\right| < 1 \implies |x| < \sqrt{2} \qquad \left(R = \sqrt{2}\right)$$

Pl. $\boxed{f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{16 - x^3}}\,, \qquad x_0 = 0 \text{ bázispontú Taylor sor?}}$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{16}}\,\frac{1}{\left(1 - \frac{x^3}{16}\right)^{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{2}\left(1 + \left(-\frac{x^3}{16}\right)\right)^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{4}}{k}\left(-\frac{x^3}{16}\right)^k =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{4}}{k}\frac{(-1)^k}{16^k}\,x^{3k}$$

Konvergenciasugár: $\left|-\dfrac{x^3}{16}\right| < 1 \implies |x| < \sqrt[3]{16}\,, \qquad R = \sqrt[3]{16}$

Pl. $\boxed{f(x) = \sqrt[3]{8 + x^2}\,, \qquad x_0 = 0 \text{ bázispontú Taylor sor?}}$

$$f(x) = \sqrt[3]{8}\,\sqrt[3]{1 + \frac{x^2}{8}} = 2\left(1 + \left(\frac{x}{\sqrt{8}}\right)^2\right)^{\frac{1}{3}} = 2\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{3}}{k}\left(\frac{x}{\sqrt{8}}\right)^{2k}$$

Konvergenciasugár: $\left|\dfrac{x^2}{8}\right| < 1 \implies |x| < \sqrt{8}\,, \qquad R = \sqrt{8}$

Pl. $\boxed{f(x) = \arcsin x\,, \qquad x_0 = 0 \text{ bázispontú Taylor sor?}}$

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} = \left(1 + (-x^2)\right)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{k}(-x^2)^k = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{8}x^4 + \cdots$$

Konvergenciasugár: $|-x^2| < 1 \implies |x| < 1 \qquad (R_1 = 1)$

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,\mathrm{d}x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{8\cdot 5}x^5 + \cdots\,, \qquad (R_2 = 1)$$

$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k\,x^k \text{ és } \sum_{k=0}^{\infty} k\,a_k\,x^k \text{ sorok konvergenciasugarai megegyeznek.}\right)$

Összefoglalva:

T $\boxed{\arcsin x = x + \dfrac{1}{6}\,x^3 + \dfrac{3}{8\cdot 5}\,x^5 + \cdots\,, \qquad R = 1}$

Pl. Írja fel az $f(x) = 5\sqrt[5]{1+x^2} - 7\sqrt[7]{1+x^2} + 2$ függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor sorát és adja meg annak konvergencia sugarát!
Létezik-e C és α úgy, hogy $f(\frac{1}{n}) \sim Cn^{\alpha}$ legyen?

$$(1+x^2)^{\frac{1}{5}} = 1 + \frac{1}{5}x^2 + \frac{\frac{1}{5}(-\frac{4}{5})}{2!}x^4 + \cdots \qquad \text{konv.sugár:} \quad |x^2| < 1 \implies |x| < 1$$

$$(1+x^2)^{\frac{1}{7}} = 1 + \frac{1}{7}x^2 + \frac{\frac{1}{7}(-\frac{6}{7})}{2!}x^4 + \cdots \qquad \text{konv.sugár:} \quad |x^2| < 1 \implies |x| < 1$$

$$f(x) = 5 - 7 + 2 + \left(5 \cdot \frac{1}{5} - 7 \cdot \frac{1}{7}\right) x^2 + \left(5\frac{-4}{5^2 \cdot 2} - 7\frac{-6}{7^2 \cdot 2!}\right) x^4 + \cdots =$$

$$= \left(-\frac{2}{5} + \frac{3}{7}\right) x^4 + \cdots \qquad |x| < 1\,, \quad R = 1$$

$a_n \sim b_n$, ha $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \left(-\frac{2}{5} + \frac{3}{7}\right)\left(\frac{1}{n}\right)^4 + \left(\ldots\right)\left(\frac{1}{n}\right)^6 + \cdots \qquad 0 < \frac{1}{n} < 1, \text{ ha } n > 1$$

$$\frac{f\left(\frac{1}{n}\right)}{\left(-\frac{2}{5} + \frac{3}{7}\right)\left(\frac{1}{n}\right)^4} = 1 + \left(\ldots\right)\frac{1}{n^2} + \left(\ldots\right)\frac{1}{n^4} + \cdots \xrightarrow[\infty]{n} 1 \qquad C = -\frac{2}{5} + \frac{3}{7}$$

$$\alpha = -4$$

Pl. Számítsa ki $\displaystyle\int_0^{0,1} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}}\, dx$ értékét közelítően!

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}} = \left(1+x^2\right)^{-\frac{1}{3}} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{3}}{k} x^{2k} \qquad \text{Konv.sugár:} \quad \left|x^2\right| < 1 \implies |x| < 1$$

$$R = 1$$

A hatványsort szabad tagonként integrálni, mivel $[0\,,0.1] \subset (-1\,,1)$.

$$\int_0^{0,1} \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^2}}\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{3}}{k} \int_0^{0,1} x^{2k}\, dx = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{3}}{k} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}\Bigg|_0^{0,1} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{3}}{k} \frac{0{,}1^{2k+1}}{2k+1} =$$

$$\underbrace{0{,}1 + \frac{-1}{3}\,\frac{0{,}1^3}{3} + \frac{(-\frac{1}{3})(-\frac{4}{3})}{2!}\,\frac{0{,}1^5}{5}}_{:=a} + \underbrace{\frac{(-\frac{1}{3})(-\frac{4}{3})(-\frac{7}{3})}{3!}\,\frac{0{,}1^7}{7}}_{:=b} + \cdots \underset{\substack{\text{Leibniz}\\ \text{típusú}}}{\approx} a\,, \qquad |H| \leq |b|$$

(Belátható, hogy Leibniz sorról van szó.)

Pl. Határozza meg az $\int\limits_0^{0,1} \sqrt[5]{32+x^5}\,\mathrm{d}x$ integrál értékét közelítőleg az integrálandó függvényt ötödrendű Taylor polinomjával közelítve! Adjon becslést az elkövetett hibára!

$$\sqrt[5]{32+x^5} = \sqrt[5]{32}\,\sqrt[5]{1+\frac{x^5}{32}} = 2\left(1+\left(\frac{x}{2}\right)^5\right)^{\frac{1}{5}} = 2\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{5}}{k}\left(\frac{x}{2}\right)^{5k} = 2\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{5}}{k}\frac{1}{32^k}x^{5k}$$

$$\text{Konv.sugár:}\quad \left|\left(\frac{x}{2}\right)^5\right| < 1 \implies |x| < 2\,, \quad R = 2$$

[0, 0,1]-ben a sor egyenletesen konvergens $\implies$ szabad tagonként integrálni.

$$\int\limits_0^{0,1} 2\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{5}}{k}\frac{1}{32^k}x^{5k}\,\mathrm{d}x = 2\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{5}}{k}\frac{1}{32^k}\left.\frac{x^{5k+1}}{5k+1}\right|_0^{0,1} = 2\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{5}}{k}\frac{1}{32^k}\frac{0{,}1^{5k+1}}{5k+1} =$$

$$= 2\left(0{,}1+\frac{\frac{1}{5}}{1}\,\frac{1}{32}\,\frac{0{,}1^6}{6!}+\frac{\frac{1}{5}\left(-\frac{4}{5}\right)}{2!}\,\frac{1}{32^2}\,\frac{0{,}1^{11}}{11}+\cdots\right) \underset{\text{Leibniz típusú}}{\approx} 2\left(0{,}1+\frac{1}{5}\,\frac{1}{32}\,\frac{0{,}1^6}{6!}\right)$$

$$|H| < 2\left|\frac{\frac{1}{5}\left(-\frac{4}{5}\right)}{2}\,\frac{1}{32^2}\,\frac{0{,}1^{11}}{11}\right|$$

(Most is belátható, hogy Leibniz sorról van szó.)

6. Fourier sor

Emlékeztető:
$\mathcal{L}$: lineáris tér (vektortér) a valós számok teste felett; $\underline{v} \in \mathcal{L}$ $(\lambda \in \mathbb{R})$

Skaláris szorzat axiómái:

$(\underline{v}_1|\underline{v}_2) = (\underline{v}_1, \underline{v}_2) \in \mathbb{R}$

1.) $(\underline{v}|\underline{v}) \geq 0$ és $(\underline{v}|\underline{v}) = 0$ a.cs.a., ha $\underline{v} = \underline{0}$ ($\underline{0}$: a tér nulleleme)

2.) $(\underline{v}_1|\underline{v}_2) = (\underline{v}_2|\underline{v}_1)$ (Nem valós esetben: $(\underline{v}_1|\underline{v}_2) = \overline{(\underline{v}_2|\underline{v}_1)}$)

3.) $(\lambda\underline{v}_1|\underline{v}_2) = \lambda(\underline{v}_1|\underline{v}_2)$

4.) $(\underline{v}_1 + \underline{v}_2 | \underline{v}_3) = (\underline{v}_1 | \underline{v}_3) + (\underline{v}_2 | \underline{v}_3)$

Pl. $C^0_{[a,b]}$-n: $(f|g) = \int_a^b f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x$ megfelel skaláris szorzatnak.

Euklideszi tér: olyan lineáris tér, amelyben van skaláris szorzat.

D $(\underline{v}_1 | \underline{v}_2) = 0$ esetén $\underline{v}_1$ *ortogonális* $\underline{v}_2$-re.

Norma: $\| \underline{v} \| = \sqrt{(\underline{v}|\underline{v})}$-vel dolgozunk (euklideszi norma)

Távolság: $\rho(\underline{v}_1, \underline{v}_2) = \| \underline{v}_1 - \underline{v}_2 \|$

●●●

T $\boxed{\text{Ha } \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n \ (\underline{v}_i \neq \underline{0}) \text{ páronként ortogonálisak, akkor lineárisan függetlenek.}}$

B

$$\lambda_1 \underline{v}_1 + \cdots + \lambda_i \underline{v}_i + \cdots + \lambda_n \underline{v}_n = \underline{0} \quad | \cdot \underline{v}_i$$

$$\lambda_1 \underbrace{(\underline{v}_1|\underline{v}_i)}_{=0} + \cdots + \lambda_{i-1} \underbrace{(\underline{v}_{i-1}|\underline{v}_i)}_{=0} + \lambda_i \underbrace{(\underline{v}_i|\underline{v}_i)}_{\neq 0} + \cdots + \lambda_n \underbrace{(\underline{v}_n|\underline{v}_i)}_{=0} = 0$$

$\Longrightarrow \lambda_i = 0$ (és ez igaz $\forall\, i$ -re)

■

T 1, $\sin x$, $\cos x$, $\sin 2x$, $\cos 2x$, $\ldots$, $\sin kx$, $\cos kx, \ldots$ páronként ortogonálisak $[-\pi, \pi]$-n (általánosan $[a, a+2\pi]$ -n), így közülük bármely véges sok lineárisan független.

A skaláris szorzat: $(f|g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot g(x)\, \mathrm{d}x$

M Így az általuk generált tér nem véges dimenziós.

B

$$\left.\begin{aligned} (1|\sin kx) &= \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx\, \mathrm{d}x = 0 \\ (1|\cos kx) &= \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\, \mathrm{d}x = 0 \end{aligned}\right\} \text{teljes periodusra integrálunk}$$

$$(\sin kx | \sin lx) = \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cdot \sin lx\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos{(k-l)x} - \cos{(k+l)x})\, \mathrm{d}x = \begin{cases} \pi, & \text{ha } k = l \\ 0, & \text{ha } k \neq l \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \| \sin kx \| = \sqrt{(\sin kx | \sin kx)} = \sqrt{\pi}$$

$$(\cos kx | \cos lx) = \begin{cases} \pi, & \text{ha } k = l \\ 0, & \text{ha } k \neq l \end{cases} \quad \text{(Az előzőhöz hasonlóan jön ki.)}$$

$$\Longrightarrow \| \cos kx \| = \sqrt{(\cos kx | \cos kx)} = \sqrt{\pi}$$

$$(\sin kx | \cos lx) = 0 \qquad \text{(Szintén hasonlóan.)}$$

Ⓜ $(1|1) = \int_{-\pi}^{\pi} 1^2 \, dx = 2\pi \Longrightarrow \| 1 \| = \sqrt{(1|1)} = \sqrt{2\pi}$

ONR (ortonormált rendszer) :

$$\underset{\varphi_0}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}}, \quad \underset{\varphi_1}{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin x}, \quad \underset{\varphi_2}{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos x}, \quad \ldots, \quad \underset{\varphi_{2k-1}}{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx}, \quad \underset{\varphi_{2k}}{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx}, \quad \ldots$$

●●●

Mivel a $\{\varphi_i\}$ függvények közül tetszőlegesen kiválasztva véges sokat, azok lineárisan függetlenek, jogos az a kérdés, hogy egy 2π szerint periodikus f függvény felírható-e a következő alakban:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \, \varphi_i(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

A felvetődő kérdések:

- $\alpha_i = ?$ $\quad (a_k = ?, \; b_k = ?)$
- Milyen f-ekre és hol lesz egyenlőség?

Az ilyen alakú sorokat *trigonometrikus sorok*nak nevezzük.

n-edrendű *trigonometrikus polinom:*

$$t_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

●●●

Mi a kapcsolat a trigonometrikus sor Φ összegfüggvénye és az a_k, b_k együtthatók között?

Ⓣ $\Phi(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ és a konvergencia egyenletes, akkor

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(x) \cos kx \, dx = \frac{(\Phi | \cos kx)}{(\cos kx | \cos kx)}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(x) \sin kx \, dx = \frac{(\Phi | \sin kx)}{(\sin kx | \sin kx)}, \qquad k = 1, 2, \ldots$$

Ⓑ Általánosságban a $\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \varphi_i(x)$ alakot kellene szoroznunk skalárisan φ_k-val és így megkapnánk α_k értékét, ahonnan már a_k ill. b_k kapható. a_2-re megmutatjuk a képlet helyességét. Hasonlóan történik a bizonyítás a többi együtthatóra is.

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_k \cos kx + b_k \sin kx + \cdots = \Phi(x)$$

Beszorozva $\cos 2x$-szel és $[-\pi, \pi]$-n integrálva (az egyenletes konvergencia miatt szabad tagonként integrálni):

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Big(\frac{a_0}{2} \cdot \cos 2x + a_1 \cos x \cdot \cos 2x + b_1 \sin x \cdot \cos 2x + a_2 \cos 2x \cdot \cos 2x + \cdots$$

$$\cdots + a_k \cos kx \cdot \cos 2x + b_k \sin kx \cdot \cos 2x + \cdots \Big) \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \Phi(x) \cdot \cos 2x \, dx$$

$$\frac{a_0}{2} \, (1 | \cos 2x) + a_1 \, (\cos x | \cos 2x) + b_1 \, (\sin x | \cos 2x) + a_2 \, (\cos 2x | \cos 2x) + \cdots$$

$$\cdots + a_k \, (\cos kx | \cos 2x) + b_k \, (\sin kx | \cos 2x) + \cdots = (\Phi(x) | \cos 2x)$$

A bal oldalon $(\cos 2x | \cos 2x) = \| \cos 2x \|^2 = \pi$, a többi skaláris szorzat az ortogonalitás miatt nulla. Így

$$a_2 \, (\cos 2x | \cos 2x) = (\Phi(x) | \cos 2x) \implies a_2 = \frac{(\Phi(x) | \cos 2x)}{(\cos 2x | \cos 2x)}$$

Ⓜ A tétel feltételei között igen fontos, hogy egyenletesen konvergens trigonometrikus sorról van szó, hiszen emiatt tudtunk tagonként integrálni egy végtelen sort.

Házi feladat: Vezesse le a bizonyítást a_3 és b_2 esetére is!

Fourier sor

Ⓓ Ha f 2π szerint periodikus és $f \in R_{[0,2\pi]}$, akkor f Fourier sora

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

ahol

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_{a}^{a+2\pi} f(x) \cos kx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}(f|\cos kx) \,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_{a}^{a+2\pi} f(x) \sin kx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}(f|\sin kx) \,, \quad k = 1, 2, \ldots$$

a_k, b_k neve: Fourier együtthatók. Itt $a \in \mathbb{R}$ tetszőleges.

•••

A Fourier sor összegfüggvénye legyen $\Phi(x)$ és az n-edik részletösszeg függvény pedig $\Phi_n(x)$!
$\left(\Phi_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)\right)$

Kitérő: *egy minimum probléma*

f adott 2π szerint periodikus, integrálható függvény.

$$t_n(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (A_k \cos kx + B_k \sin kx) = \sum_{i=0}^{2n} \alpha_i \, \varphi_i(x)$$

Ezen trigonometrikus polinomok közül melyik van f-hez átlagnormában a legközelebb? Azaz milyen α_i-kre lesz $\| f - t_n \| = \min.$?

Ⓣ $\| f - t_n \| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - t_n(x))^2 \, \mathrm{d}x}$ akkor minimális, ha az együtthatók a Fourier együtthatók, tehát $t_n(x) = \Phi(x)$. (¬B)

•••

Visszatérve a Fourier sorhoz, még válaszolni kell arra a kérdésre, hogy a Fourier sor milyen x-ekre konvergens, és $f(x) = \Phi(x)$ mikor igaz.

Ⓣ Ha a 2π szerint periodikus f függvény folytonos és Fourier sora egyenletesen konvergens, akkor $f(x) = \Phi(x)$ (¬B)

Pl. $f(x) = |x| \quad x \in [-\pi, \pi); \quad f(x + 2\pi) = f(x)$ L. előadás!

•••

Ⓣ Ha f kétszer folytonosan deriválható 2π szerint periodikus függvény, akkor Fourier sora egyenletesen konvergens. (¬B)

Önmagában az egyenletes konvergenciából még nem következik az $f(x) = \Phi(x)$ egyenlőség. Csak annyi következik, hogy Φ Fourier együtthatói megegyeznek f Fourier együtthatóival.

Kérdés: ha f és Φ Fourier együtthatói azonosak, lehetséges-e, hogy $f(x) \not\equiv \Phi(x)$? Lehetséges. Pl. az $f(x) = |x|$-es példában f értékét 1 pontban megváltoztatva (pl. $f(1) := 3$), a Fourier együtthatók nem változnak, így $\Phi(x)$ sem változik, de igaz, hogy $f_1(x) \not\equiv \Phi(x)$ $(\equiv f(x))$.
Ha viszont f folytonos, akkor már érdekes a kérdés. (A választ már persze ismerjük.)

Legyenek f és Φ Fourier együtthatói azonosak, tehát $f - \Phi$ Fourier együtthatói nullák, vagyis $(f - \Phi|\varphi_k) = 0$. Tehát $f - \Phi$ ortogonális a $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ függvényrendszerre.

Bővíthető-e a trigonometrikus rendszer?

Ⓣ Ha a g függvény 2π szerint periodikus és *folytonos* és

$$(g|\varphi_k) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots \quad \Longrightarrow \quad g \equiv 0.$$

Azaz a trigonometrikus rendszer nem bővíthető. (¬B)

A Fourier sor konvergenciájával kapcsolatban sok tétel ismert. Mi egy könnyen kezelhető tételt használunk:

Dirichlet tétel (egy elégséges tétel a Fourier sor konvergenciájára)

Ⓣ Ha az f függvény 2π szerint periodikus, $f \in R_{[0,2\pi]}$, a periodus felbontható véges sok (α, β) intervallumra, hogy itt f monoton és a végpontokban $\exists$ a véges határérték, akkor f Fourier sora minden x-re konvergens, és

$$\Phi(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$$

7. Feladatok

7.1. Függvénysorozatok

Az alábbiakban jelölje f az (f_n) függvénysorozat határfüggvényét $\left(f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)\right)$ és $H = D_f$ (konv. tart.).

1.) $f(x) = ?, \quad H = ?$

a.) $f_n(x) = \dfrac{1}{(2x)^n}$

b.) $f_n(x) = \sin^n 2x$

c.) $f_n(x) = \dfrac{(x-1)^n}{9^n}$

d.) $f_n(x) = x^2 + 2\dfrac{x}{n}$

2.) $f_n(x) = \dfrac{(x+1)^n}{n}$

a.) $f(x) = ?, \quad H = ?$

b.) Egyenletesen konvergens-e a függvénysorozat a $[-2,-1]$ intervallumon?

3.) $f_n(x) = \dfrac{x}{2+x^n} \qquad \in (-1,1]$

Egyenletesen konvergens-e a $(-1,1]$ ill. $(-1,1)$ intervallumokon?

4.) $f_n(x) = (\arcsin x)^n$

a.) $f(x) = ?, \quad H = ?$

b.) Egyenletesen konvergens-e a konvergenciatartományban?

5.) $f_n(x) = \dfrac{n^2x^2}{n^2x^2+1}$

a.) $f(x) = ?, \quad H = ?$

b.) Egyenletesen konvergens-e $[0,1]$-en illetve $[1,2]$-n?

6.) $f_n(x) = \dfrac{x^2}{3+2x^{2n}}$

a.) $f(x) = ?, \quad H = ?$

b.) Egyenletesen konvergál-e (f_n) a konvergenciatartományon?

c.) Mely x_0 pontban teljesül a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ numerikus sorra a konvergencia szükséges feltétele? Határozza meg a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ függvénysor konvergenciatartományát!

7.) $f_n(x) = x\mathrm{e}^{-nx}$

a.) $f(x) = ?$

b.) $\| f_n - f \|_{[0,1]} = ?$ Egyenletes-e a konvergencia $[0,1]$-en?

8.) $f_n(x) = \dfrac{x}{n^2 + 4x^2}$

a.) $f(x) = ?$

b.) $\| f_n - f \| = ?$ Egyenletes-e a konvergencia?

9.) $\lim\limits_{n\to\infty} \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{\mathrm{e}^{2nx}}\,\mathrm{d}x = ?$

7.2. Függvénysorok

10.) Határozza meg az alábbi függvénysorok konvergenciatartományát!

a.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x$

b.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$

c.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\mathrm{e}^{nx}}{n}$

d.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2 + x^4}$

e.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + x^4}$

f.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^{nx}}$

11.) Egyenletesen konvergensek-e az alábbi függvénysorok az adott I intervallumon?

a.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^2 + 2x^2}, \quad I = (-\infty, \infty)$

b.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n^2(x+3)}{n^2 + 1 + \cos nx}, \quad I = (-\infty, \infty)$

c.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^n, \quad I = [0,1]$ ill. $I = (0,2)$

12.) Szabad-e tagonként deriválni tetszőleges x-re a $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi x + 3)}{n^3}$ függvénysort?

13.) Határozza meg az alábbi függvénysorok konvergenciatartományát!

a.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{x}{2}\right)^n$

b.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n} x^n$

c.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n}(x-3)^n$

d.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{n^5}(x+2)^n$

e.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{(n+1)!}(x+1)^n$

f.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-6)^n}{(2n)!}$

g.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^{3n}}{n^2\,2^n}$

h.) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x+1)^{2n}}{(n+1)^2\,3^n}$

14.) Határozza meg az alábbi sorok konvergenciatartományát és összegfüggvényét!

a.) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} (k-1)x^{k+1}$

b.) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x^k}{k-1}$

c.) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1}(x-2)^{k-1}$

15.) Írja fel az alábbi függvények $x_0 = 0$ körüli Taylor sorát, és határozza meg a sor konvergenciatartományát!

a.) $f(x) = 2x^2 + 3x - 2$

b.) $f(x) = \dfrac{1}{1+2x^2}$

c.) $f(x) = \mathrm{e}^{2x}$

d.) $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$

e.) $f(x) = \sin^2 x$

f.) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$

g.) $f(x) = \operatorname{arctg} 2x$

h.) $f(x) = \dfrac{3}{8+x^3}$

i.) $f(x) = \sqrt[3]{1-2x^2}$

j.) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{27-x}}$

16.) Írja fel az alábbi függvények $x_0 = 1$ körüli Taylor sorát, és határozza meg a sor konvergenciatartományát!

a.) $f(x) = 6x^3 - 2x^2 + 3$

b.) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

c.) $f(x) = \mathrm{e}^{x}$

d.) $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}$

17.) $f(x) = x^5\mathrm{e}^x \quad f^{(67)}(0) = ?$

18.) $f(x) = \ln(8-3x^2) \quad f^{(10)}(0) = ?,\ f^{(9)}(0) = ?$

19.) Felhasználva, hogy $(\operatorname{arsh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, fejtse $x_0 = 0$ bázispontú Taylor sorba az

$$f(x) = \operatorname{arsh} x$$

függvényt! $R = ?$
Adja meg a $g(x) = 1 - \operatorname{arsh}(2x^3)$ függvény sorfejtését is!

20.) $f(x) = \sqrt[5]{1+2x^2} + \operatorname{sh} x - 1$

a.) Adja meg a függvény $x_0 = 0$ körüli hatodrendű Taylor polinomját!

b.) Határozza meg a függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor sorának konvergenciasugarát!

21.) a.) Fejtse $x_0 = 0$ bázispontú Taylor sorba az $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{8-x}}$ függvényt, és határozza meg a sorfejtés konvergenciasugarát!

b.) Írja fel f harmadrendű Taylor polinomját elemi műveletekkel!

c.) $\left(x^{100} f(x)\right)^{(200)}(0) = ?$

22.) $f(x) = \sqrt[12]{1+2x^2} - \sqrt[18]{1+3x^2}$

a.) Írja fel a függvény $x_0 = 0$ körüli Taylor sorát, és határozza meg annak konvergenciasugarát!

b.) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x^4} = ?$

23.) Határozza meg az alábbi integrálok közelítő értékét az integrálandó függvény Taylor sorának 3. részletösszegét felhasználva!

a.) $\displaystyle\int_0^1 \cos x^2 \, dx$

b.) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{x} \, dx$

c.) $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} \, dx$

d.) $\displaystyle\int_0^{0,1} \frac{1}{\sqrt{1+x^3}} \, dx$