Info, Analízis(2) **12. gyakorlat** **2008.**

ápr. 24.(csütörtök 14 órától), illetve 12. hét

A tartományokat mindig rajzoljuk fel és jelöljük be, hogy mi szerint integrálunk belül!

1. Kétszeres integrál téglalap- és normáltartományokon

1. Pl.

$$\iint_T x\, sinxy \,\,\mathrm{d}T = ?,$$

ha T az $1 \le x \le 3$, $0 \le y \le \frac{\pi}{2}$ téglalaptartomány.

1. ábra

Megoldás:

A függvény folytonos, ezért mindegy, hogy milyen sorrendben integrálunk, az eredmény ugyanaz. De, ha először x szerint integrálunk, akkor parciális integrál lenne, ezért próbáljuk meg a másik sorrendet!

$$\int_1^3 \int_0^{\pi/2} x\, sinxy \,\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_1^3 -\cos xy\Big|_{y=0}^{\pi/2} \,\,\mathrm{d}x =$$

$$\int_1^3 \left(-\cos\frac{\pi}{2}x + 1\right)\,\mathrm{d}x = -\frac{\sin\frac{\pi}{2}x}{\frac{\pi}{2}} + x\Bigg|_1^3 = \cdots = 2 + \frac{4}{\pi}$$

2. Pl.

$$\iint_T x \,\,\mathrm{d}T = ?,$$

ha T az $y = x^2$ és az $y = x + 2$ által határolt korlátos tartomány.

2. ábra

Megoldás:

A két görbe metszéspontjai: a $(-1, 1)$, $(2, 4)$ pontok és az x tengely felől nézve normáltartományról van szó.

$$\int_{-1}^{2} \int_{y=x^2}^{x+2} x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} - x\, y|_{x^2}^{x+2} \, \mathrm{d}x = \int_{-1}^{2} \left(x\,(x+2) - x^3\right) \, \mathrm{d}x = \cdots = \frac{9}{4}$$

A végét már nem kell részletezni!

3. Pl.

$$\iint_T \frac{x^2}{y^2} \, \mathrm{d}T = ?,$$

ha az első síknegyedbe eső korlátos T tartomány:

$y \geq \dfrac{1}{x}$, $y \leq x$ és $1 \leq x \leq 2$

3. ábra

Megoldás:

Az x tengely felől nézve normáltartományról van szó.

$$\int_{1}^{2} \int_{y=1/x}^{x} \frac{x^2}{y^2} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x = \int_{1}^{2} - \left.\frac{x^2}{y}\right|_{1/x}^{x} \, \mathrm{d}x = \int_{1}^{2} \left(-x + x^3\right) \, \mathrm{d}x = \cdots = \frac{9}{4}$$

A végét már nem kell részletezni!

4. Pl.

Cserélje fel az integrálás sorrendjét!

a) $I_1 = \int\limits_{x=-1}^{0} \int\limits_{y=0}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\ \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int\limits_{x=0}^{1} \int\limits_{y=0}^{1-x} f(x,y)\ \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

b) $I_2 = \int\limits_{x=0}^{\sqrt{2}} \int\limits_{y=0}^{x^2} f(x,y)\ \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int\limits_{x=\sqrt{2}}^{2} \int\limits_{y=0}^{2} f(x,y)\ \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x + \int\limits_{x=2}^{4} \int\limits_{y=0}^{4-x} f(x,y)\ \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$

Megoldás:

A tartományokat feltétlenül rajzoljuk fel!

a) $I_1 = \int\limits_{y=0}^{1} \int\limits_{x=-\sqrt{1-y^2}}^{x=1-y} f(x,y)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

b) $I_2 = \int\limits_{y=0}^{2} \int\limits_{x=\sqrt{y}}^{4-y} f(x,y)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

5. Pl.

$$\int\limits_{0}^{1} \int\limits_{y^2}^{1} y\ \sin x^2\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = ?$$

Megoldás:

Nem tudunk primitív függvényt felírni x szerint , ezért először y szerint próbálunk integrálni:

A kiindulás: $y^2 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$ Ábra:....

Felcserélve a sorrendet: $0 \le y \le \sqrt{x}$, $0 \le x \le 1$

$$I = \int\limits_{x=0}^{1} \int\limits_{y=0}^{\sqrt{x}} y\ \sin x^2\ \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int\limits_{x=0}^{1} \left.\frac{y^2}{2}\right|_0^{\sqrt{x}} \cdot \sin x^2\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int\limits_{x=0}^{1} x\ \sin x^2\ \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int\limits_{x=0}^{1} 2x\ \sin x^2\ \mathrm{d}x = \frac{1}{4} \left[-\cos x^2\right]_0^1 = \frac{1}{4} \left(-\cos 1 + 1\right)$$

2. Kettős integrálok transzformációja

Elődáson biztosan minden előadáson nagyon kevés szerepelt erről. Ezért javaslom, hogy részletesen beszéljenek a polártranszformációról, a Jacobi determinánst is célszerű levezetni. A példáknál mindig rajzolják fel a tartományt és a határokat részletesen beszéljék meg! A példákat nem mindig kell részletesen végigcsinálni. Elég néha csak megbeszélni az integrálási technikát és felírni a végeredményt.

6. Pl.

$$\boxed{\begin{array}{l} \displaystyle\iint_T y^2 \ \mathrm{d}T = ?, \\ \text{ha } T: \quad x^2+y^2 \le 4\ , \ \ 0 \le y \le x \end{array}}$$

Megoldás:
Polártranszformációval dolgozunk:

$$I = \int_{\varphi=0}^{\pi/4} \int_{r=0}^{2} r^2 \ \sin^2\varphi \ \underbrace{r}_{|J|} \ \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi = \int_{r=0}^{2} r^2 \ \mathrm{d}r \ \cdot \int_{\varphi=0}^{\pi/4} \underbrace{\sin^2\varphi}_{\frac{1-\cos 2\varphi}{2}} \ \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \left.\frac{r^4}{4}\right|_0^2 \cdot \left.\left(\frac{1}{2}\varphi - \frac{\sin 2\varphi}{4}\right)\right|_0^{\pi/4} = 4\left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right) = \frac{\pi}{2} - 1$$

7. Pl.

$$\boxed{\begin{array}{l} \displaystyle\iint_T x^2 \ y \ \mathrm{d}T = ?, \\ \text{ha } T: \quad 1 \le x^2+y^2 \le 4\ , \ \ y \ge 0\ , \ \ x \ge 0 \end{array}}$$

Megoldás:
Polártranszformációval dolgozunk:

$$I = \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \int_{r=1}^{2} r^2 \ \cos^2\varphi \ \ r\sin\varphi \ \ r \ \ \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\varphi = \int_{r=1}^{2} r^4 \ \mathrm{d}r \ \cdot \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \cos^2\varphi \ \sin\varphi \ \ \mathrm{d}\varphi =$$

$$= \left.\frac{r^5}{5}\right|_1^2 \cdot \left.\left(-\frac{\cos^3\varphi}{3}\right)\right|_0^{\pi/2} = \left(0 + \frac{1}{3}\right)\left(\frac{2^5}{5} - \frac{1}{5}\right) = \frac{31}{15}$$

8. Pl.

> Határozza meg annak a síkrésznek a területét, amelyet a következő egyenlőtlenségek meghatároznak!
>
> $$x^2+y^2 \geq 4x \ , \ \ x^2+y^2 \leq 8x \ , \ \ y \leq \sqrt{3}\, x \ , \ \ y \geq x$$

Megoldás:

Polártranszformációval dolgozunk:

$$\text{terület} \ = \iint\limits_T 1 \ \mathrm{d}T \ = \int\limits_{\varphi=\pi/4}^{\pi/3} \int\limits_{r=4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} r \ \ \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\varphi \ =$$

$$= \int\limits_{\varphi=\pi/4}^{\pi/3} \left. \frac{r^2}{2} \right|_{4\cos\varphi}^{8\cos\varphi} \mathrm{d}\varphi \ = \ 24 \int\limits_{\varphi=\pi/4}^{\pi/3} \cos^2\varphi \ \mathrm{d}\varphi \ = \ \cdots$$

Nem kell befejezni!

9. Pl.

> $$\iint\limits_T f \ \mathrm{d}T \ = ?,$$
>
> ha $T: \quad x^2-4x+y^2 \leq 0 \ , \ \ 0 \leq y \quad$ és
>
> a) $f(x,y) \ = \ y\,(x^2+y^2)^3$
>
> b) $f(x,y) \ = \ (x^2-4x+y^2)^5$

Megoldás:

a) $x = r\cos\varphi \ , \ \ y = r\sin\varphi \ , \ \ |J| = r \ , \ \ 0 \leq r \leq 4\cos\varphi \ , \ \ 0 \leq \varphi \leq \pi/2$

$$I \ = \int\limits_{\varphi=0}^{\pi/2} \int\limits_{r=0}^{4\cos\varphi} r\sin\varphi \ \ \left(r^2\right)^3 \ r \ \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \ = \ (\text{ innen HF.}) \ = \ \frac{4^9}{90}$$

b) $x = 2 + r\cos\varphi \ , \ \ y = r\sin\varphi \ , \ \ |J| = r \ , \ \ 0 \leq r \leq 2 \ , \ \ 0 \leq \varphi \leq \pi$

$$x^2-4x+y^2 \ = \ (x-2)^2+y^2-4 = r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi - 4 \ = \ r^2-4$$

$$I \ = \int\limits_{\varphi=0}^{\pi} \int\limits_{r=0}^{2} (r^2-4)^5 \ r \ \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \ = \ \cdots \ = \ -\frac{4^6\,\pi}{12}$$