13. gyakorlat

Gyakorlatanyag hármasintegrálból

1. feladat

$$I \;=\; \int_V \; xy^2 z^3 \; dV \;=?$$

A V korlátos térrész határai:

$$z = xy\,,\text{(felület)}\quad z=0\,,\quad x=1\,,\quad y=0\,,\quad y=x\,\text{(síkok)}$$

Megoldás.

$$I \;=\; \iint_{\text{háromszög}} \int_{z=0}^{xy} \; xy^2 z^3 \; dz\,dy\,dx \;=\; \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{x}\int_{z=0}^{xy} \; xy^2 z^3 \; dz\,dy\,dx \;=$$

$$= \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{x} \; xy^2 \left[\frac{z^4}{4}\right]_{z=0}^{z=xy} dy\,dx \;=\; \frac{1}{4}\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{x} \; x^5 y^6 \;\; dy\,dx \;=$$

$$\frac{1}{4}\int_{x=0}^{1} \; x^5 \left[\frac{y^7}{7}\right]_{y=0}^{y=x} dx \;=\; \frac{1}{4.7}\int_{x=0}^{1} \; x^{12}\;dx \;=\frac{1}{364}$$

2. feladat

$$I \;=\; \int_V \; \sqrt{x^2+y^2}\; dV \;=?$$

A V korlátos térrész határai:

$$z=\sqrt{x^2+y^2}\;\; \text{(kúp)}\;\; \text{és a} \quad z=1\;\;\text{(sík)}$$

Megoldás.

A térrész merőleges vetülete az (x,y) síkra az $x^2+y^2=1\,,z=0$ kör, a térrész hengerben van. Hengerkoordinátákkal dolgozunk.

Hengerkoordináták:

$$x=r\cos\varphi\,,\; y=r\sin\varphi\,,\; z=z\,,\; r\ge 0\,,\; \varphi\in[0,2\pi)$$

A Jacobi determináns abszolútértéke: $|J|=r$

$$I \;=\; \iint_{x^2+y^2\le 1}\int_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{z=1} \; \sqrt{x^2+y^2}\; dz\,dT \;=$$

$$\int_0^{2\pi}\int_{r=0}^{1}\int_{z=r}^{z=1} \; r\,.\,|J|\; dz\,dr\,d\varphi \;=$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_{r=0}^{1}\int_{z=r}^{z=1} \; r^2\; dz\,dr\,d\varphi \;=\; \int_0^{2\pi}\int_{r=0}^{1} \; r^2\,\left[z\right]_r^1\, dr\,d\varphi \;=$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_{r=0}^{1} \; r^2\,(1-r)\; dr\,d\varphi \;=\; ... \;=\frac{\pi}{6}$$

3. feladat

Számolja ki a $x^2 + y^2 = 1$ egyenletű henger és a $z = 0$ valamint a $z = 2 - x - y$ egyenletű síkok által határolt térrész térfogatát!

Megoldás.

$$V = \iiint_V 1\, dV = \iint_{x^2+y^2\leq 1} \int_{z=0}^{z=2-x-y} 1\, dz\, dT =$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{r=0}^{1} \int_{z=0}^{z=2-r\cos\varphi - r\sin\varphi} 1\,.\,|J|\; dz\, dr\, d\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{r=0}^{1} \int_{z=0}^{z=2-r\cos\varphi - r\sin\varphi} r\; dz\, dr\, d\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{r=0}^{1} \big[z\big]_{z=0}^{z=2-r\cos\varphi - r\sin\varphi} r\; dr\, d\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{r=0}^{1} (2 - r\cos\varphi - r\sin\varphi)\, r\; dr\, d\varphi = \ldots = 2\pi$$

4. feladat

Számolja ki a $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ és a $z = 6 - x^2 - y^2$ egyenletű felületek által határolt térrész térfogatát!

Megoldás.
A kúp és a paraboloid által határolt térrész merőleges vetülete az (x, y) síkra az $x^2+y^2 = R^2\,, z = 0$ kör, a térrész hengerben van. Hengerkoordinátákkal dolgozunk.

A vetület a metszetgörbe vetülete, ezért az $\sqrt{x^2 + y^2} = 6 - x^2 - y^2$, azaz a $\sqrt{R^2} = 6 - R^2$ egyenletből számoljuk a vetületi kör sugarát: $R = 6 - R^2$, azaz $R = 2$ ($R = -3$ nem lehet a sugár).

$$V = \iiint_V 1\, dV = \iint_{x^2+y^2\leq 4} \int_{z=\sqrt{x^2+y^2}}^{z=6-x^2-y^2} 1\, dz\, dT =$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{r=0}^{2} \int_{z=r}^{z=6-r^2} 1\,.\,|J|\; dz\, dr\, d\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{r=0}^{2} \int_{z=r}^{z=6-r^2} r\; dz\, dr\, d\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{r=0}^{2} \big[z\big]_{z=r}^{z=6-r^2} r\; dr\, d\varphi =$$

$$\int_0^{2\pi} \int_{r=0}^{2} (6 - r^2 - r)\, r\; dr\, d\varphi = \ldots = 32\pi/3$$

5. feladat

$$I = \int_V xyz \, dV = ?$$

Ahol a V korlátos térrész az $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ gömb belsejének az $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$ térnyolcadba eső része.

Megoldás.

Gömbi koordinátákkal dolgozunk. Jelöljük az (x, y, z) pontba mutató helyvektor hosszát r-rel, a z tengely pozitív szárával bezárt szögét ϑ-val! Így $z = r\cos\vartheta$. Legyen továbbá a helyvektor (x, y) síkra való merőleges vetületének az x tengely pozitív szárával bezárt szöge φ A helyvektor (x, y) síkra való merőleges vetületének a hossza $r\sin\vartheta$, így $x = r\sin\vartheta\cos\varphi$, $y = r\sin\vartheta\sin\varphi$. A geometriai meggondolásból kapjuk, hogy $r \geq 0$, $0 \leq \varphi < 0$, $0 \leq \vartheta \leq \pi$. A gömbi koordinátákhoz tartozó Jacobi determináns abszolútértéke $|J| = r^2 \sin\vartheta$. (A vizsgán vagy megadjuk ezt a $|J|$-t, vagy pedig ki kell számolni)

$$I = \iiint_V xyz \, dV = \iint_{x^2+y^2 \leq 1\,,\, x \geq 0\,,\, y \geq 0} \int_{z=0}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz \, dz \, dT =$$

$$\int_0^{\pi/2} \int_{r=0}^{1} \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi/2} (r\sin\vartheta\cos\varphi \, r\sin\vartheta\sin\varphi \, r\cos\vartheta) \, . \, |J| \, d\vartheta \, dr \, d\varphi =$$

$$\int_0^{\pi/2} \int_{r=0}^{1} \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi/2} (r\sin\vartheta\cos\varphi \, r\sin\vartheta\sin\varphi \, r\cos\vartheta) \, r^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, dr \, d\varphi =$$

$$\int_0^{\pi/2} \int_{r=0}^{1} \int_{\vartheta=0}^{\vartheta=\pi/2} r^5 \, \sin^3\vartheta\cos\vartheta \, \cos\varphi\sin\varphi \, d\vartheta \, dr \, d\varphi =$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos\varphi\sin\varphi) \, d\varphi \int_0^1 r^5 \, dr \int_0^{\pi/2} \sin^3\vartheta\cos\vartheta \, d\vartheta =$$

$$= \left[\frac{\sin^2\varphi}{2}\right]_0^{\pi/2} \left[r^6/6\right]_0^1 \left[\frac{\sin^4\vartheta}{4}\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{48}$$

6. feladat

Számolja ki az $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ és a $\sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq \sqrt{3}\,\sqrt{x^2+y^2}$ egyenlőtlenségekkel jellemzett térrész térfogatát!

Megoldás.

A térrész az egységgömbben van. Gömbkoordinátákkal dolgozunk. A $z = \sqrt{x^2+y^2}$ felület gömbkoordinátákkal kifejezve: $\vartheta = \pi/4$ a $z = \sqrt{3}\,\sqrt{x^2+y^2}$ felület pedig: $\vartheta = \pi/3$.

$$V = \iiint_V 1 \, dV = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \int_{\pi/4}^{\pi\,3} r^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, dr \, d\varphi =$$

$$= 2\pi \left[r^3/3\right]_0^1 \left[-\cos\vartheta\right]_{\pi/4}^{\pi/3} = \frac{8\pi}{3}(\sqrt{2}-1)$$

További feladatok

1. feladat

Számolja ki a $(x-2)^2+y^2=4$ egyenletű henger és a $z=0$ sík valamint a $z=x^2+y^2$ egyenletű paraboloid által határolt térrész térfogatát!

2. feladat

$$I \;=\; \int_V 2z\,dV \;=?$$

Ahol a V korlátos térrész az $z \le 3-\sqrt{x^2+y^2}$ és a $z \ge 2$ egyenlőtlenségekkel jellemzett.

3. feladat

$$I \;=\; \int_V xy^2z^3\,dV \;=?$$

Ahol a V korlátos térrész az $x^2+y^2+z^2 \le 9$ és a $z \ge \sqrt{3x^2+3y^2}$ egyenlőtlenségekkel jellemzett. (Gömbi trafo.)

5. feladat

$$I \;=\; \int_V x^2z\,dV \;=?$$

Ahol a V korlátos térrész az $x^2+y^2+z^2 \le 4$ és a $z \ge \frac{x^2+y^2}{3}$ egyenlőtlenségekkel jellemzett. (Henger trafo.)