1. feladat (12 pont)

Határozza meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y' = \sqrt{4+y^2} \cdot x \cdot e^{2x}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{4+y^2}}\,dy = \int x e^{2x}\,dx \quad (3)$$

$$\frac{1}{\sqrt{4}} \int \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{y}{2}\right)^2}}\,dy = \frac{1}{2}\,\frac{\operatorname{arsh}\frac{y}{2}}{\frac{1}{2}} + C_1 \quad (3)$$

$$\int x e^{2x}\,dx = \frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx = \frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + C_2$$

$u = x \quad v' = e^{2x}$

$u' = 1 \quad v = \frac{e^{2x}}{2}$ (5)

A de. megoldása:

$$\operatorname{arsh}\frac{y}{2} = \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right)e^{2x} + C \;; \quad C \in \mathbb{R} \quad (1)$$

2. feladat (9+6=15 pont)

a) Írja fel a homogén, illetve az inhomogén lineáris elsőrendű differenciálegyenelet általános alakját!
Melyiknek a megoldásai alkotnak lineáris teret? Állítását bizonyítsa be!

b) Határozza meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y''' - 4y'' + 4y' = 0$$

a.) $\boxed{9}$

$$\left.\begin{aligned} (H):&\quad y' + g(x)y = 0 \\ (I):&\quad y' + g(x)y = f(x) \end{aligned}\right\} (3)$$

(T) (H) megoldásai lineáris teret alkotnak. (1)

(B) y_1 és y_2 megoldja (H)-t, azaz

(5)

$$y_1' + g(x)y_1 \equiv 0 \quad | \cdot c_1$$

és

$$y_2' + g(x)y_2 \equiv 0 \quad | \cdot c_2$$

$$+\quad c_1y_1' + g(x)c_1y_1 + c_2y_2' + g(x)c_2y_2 \equiv 0$$

$$\Rightarrow (c_1y_1 + c_2y_2)' + g(x)(c_1y_1 + c_2y_2) \equiv 0,$$

tehát $c_1y_1 + c_2y_2$ is megoldás, vagyis (H) megoldásai lineáris teret alkotnak.

b) $y''' - 4y'' + 4y' = 0$

$\boxed{6}$ $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda = 0 \implies \lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = \lambda(\lambda-2)^2 = 0$ (2)

$\implies \lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = 2$ (2)

$y = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 x e^{2x} \qquad C_i \in \mathbb{R}$ (2)

3. feladat (7+7=14 pont)

Határozza meg a következő függvények $x_0 = 2$ bázisponthoz tartozó Taylor-sorát, valamint a sorok konvergenciasugarát!

a) $f(x) = \dfrac{1}{2x+3}$, $\qquad$ b) $g(x) = \dfrac{1}{(2x+3)^2}$.

A $g(x)$ függvény Taylor-sorának felírásához használja fel $f(x)$ Taylor-sorát!

a.) $f(x) = \dfrac{1}{2(x-2)+7} = \dfrac{1}{7} \dfrac{1}{1 - \frac{-2(x-2)}{7}} = \dfrac{1}{7} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\dfrac{2(x-2)}{7}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{7}\left(-\dfrac{2}{7}\right)^n (x-2)^n$ (5)

$\boxed{7}$

K.T.: $\left|-\dfrac{2(x-2)}{7}\right| = \dfrac{2}{7}|x-2| < 1 \implies |x-2| < \dfrac{7}{2} = R_f$ (2)

b.) $f'(x) = \left((2x+3)^{-1}\right)' = -1 \cdot (2x+3)^{-2} \cdot 2 = -2 \dfrac{1}{(2x+3)^2}$

$\boxed{7}$

$\implies g(x) = -\dfrac{1}{2} f'(x) = -\dfrac{1}{2} \dfrac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{1}{7}\left(-\dfrac{2}{7}\right)^n (x-2)^n =$ (2)

$= -\dfrac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{7}\left(-\dfrac{2}{7}\right)^n \cdot n\,(x-2)^{n-1}$ (4) $\qquad R_g = R_f = \dfrac{7}{2}$ (1)

4. feladat (4+7+6=17 pont)

a) Mit értünk azon, hogy az $f(\underline{x})$ többváltozós függvény totálisan differenciálható az $\underline{a} \in \mathbb{R}^n$ pontban? (Ismertesse a definíciót!)

b) Mi a kapcsolat többváltozós függvények totális deriválhatósága és folytonossága között? A tanult tételt mondja ki és bizonyítsa be!

c)

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Totálisan deriválható-e a fenti $f(x,y)$ függvény az origóban?

a) 4

(D)
$f: D \mapsto \mathbb{R}, \quad D \subset \mathbb{R}^m, \quad \underline{a} = (a_1, \ldots, a_m) \in \operatorname{int} D, \quad \underline{h} = (h_1, \ldots, h_m), \quad \underline{a} + \underline{h} \in D$

f (totálisan) deriválható $\underline{a}$-ban, ha Δf előállítható az alábbi alakban:

$$\Delta f = f(a_1 + h_1, \ldots, a_m + h_m) - f(a_1, \ldots, a_m) = A_1 h_1 + \cdots + A_m h_m + \varepsilon_1 h_1 + \cdots + \varepsilon_m h_m$$

vagy vektorosan

$$\boxed{\Delta f = f(\underline{a} + \underline{h}) - f(\underline{a}) = \underline{A} \cdot \underline{h} + \underline{\varepsilon}(\underline{h}) \cdot \underline{h}}$$

ahol $\underline{A} = [A_1, \ldots, A_m]$ független $\underline{h}$-tól és $\quad \underline{\varepsilon} = [\varepsilon_1(\underline{h}), \ldots, \varepsilon_m(\underline{h})] \to \underline{0}$, ha $\underline{h} \to \underline{0}$.

$(\underline{A} = \operatorname{grad} f)$

b) 7

(T) $\boxed{\text{Ha } f\ \underline{a}\text{-ban totálisan deriválható} \Longrightarrow f\ \underline{a}\text{-ban folytonos}}$

(B) $f(\underline{a} + \underline{h}) = f(\underline{a}) + \underline{A} \cdot \underline{h} + \underline{\varepsilon}(\underline{h}) \cdot \underline{h}$

$$\underbrace{\lim_{\underline{h} \to \underline{0}} f(\underline{a} + \underline{h})}_{= \lim_{\underline{x} \to \underline{a}} f(\underline{x})} = \lim_{\underline{h} \to \underline{0}} \left(f(\underline{a}) + \underline{A} \cdot \underline{h} + \underline{\varepsilon}(\underline{h}) \cdot \underline{h}\right) = f(\underline{a})$$

Tehát a határérték = a helyettesítési értékkel. ■

c) 6

$$\lim_{x \to 0} f(x, mx) = \lim_{x \to 0} \frac{x \cdot mx}{x^2 + m^2 x^2} = \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{x^2}{x^2}}_{=1} \frac{m}{1+m^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

Mivel függ m-től $\Rightarrow \lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y) \nexists$

$\Rightarrow f$ nem folytonos $(0,0)$-ban $\Rightarrow f$ nem differenciálható $(0,0)$-ban.

(M) $f_x'(0,0) = 0$ és $f_y'(0,0)$ belátható $\not\Rightarrow f$ differenciálható $(0,0)$-ban.

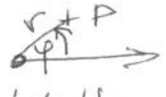
*** 5. feladat (7+8=15 pont)**

a) Ismertesse a síkbeli polárkoordinátákat egy ábrán, és számolja ki a síkbeli polártranszformáció Jacobi-determinánsát!

b) Határozza meg a következő kettős integrál értékét!

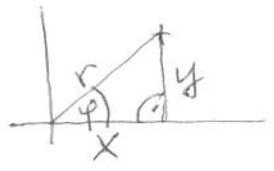
$$\iint_T x\, y^2 \ \mathrm{d}T \ = ? \qquad\qquad T: \ x^2 + y^2 \le 9, \quad x \ge 0, \quad y \ge x$$

a) polárkoordináták: r, φ



1

Kapcsolat a polárkoordináták és a Descartes koordináták között:



$x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$

2

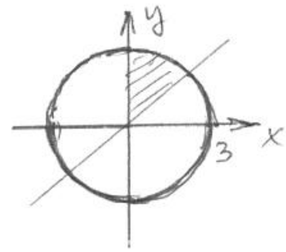
an20120524/3.

$$\mathcal{J} = \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} x_r' & x_\varphi' \\ y_r' & y_\varphi' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r$$ 4

b) $\boxed{8}$

$x = r\cos\varphi \qquad 0 \le r \le 3$

$y = r\sin\varphi \qquad \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$



$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^3 r\cos\varphi \, r^2 \sin^2\varphi \underbrace{r}_{|\mathcal{J}|} \, dr \, d\varphi =$$ 4 $\ast$

$$= \int_0^3 r^4 \, dr \cdot \int_{\pi/4}^{\pi/2} \underbrace{\cos\varphi}_{f'} \underbrace{\sin^2\varphi}_{f^2} \, d\varphi = \frac{r^5}{5}\Big|_0^3 \cdot \frac{\sin^3\varphi}{3}\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} =$$

$$= \frac{1}{5} \cdot 3^5 \cdot \frac{1}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3\right)$$ 4

*** 6. feladat (4+8=12 pont)**

a) Ismertesse az $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ komplex függvény ($z = x + iy$) deriválhatóságáról tanult szükséges és elégséges feltételt! Adja meg $f'(z)$-t u és v segítségével!

b) Hol deriválható, hol reguláris az $f(z) = z \cdot |z|^2$ függvény?

a) (T) Szükséges és elégséges tétel differenciálhatóságra:

Az $f(z) = u(x,y) + j\,v(x,y)$ komplex függvény akkor és csak akkor differenciálható az értelmezési tartomány $z_0 = x_0 + jy_0$ belső pontjában, ha u és v totálisan deriválható (x_0, y_0)-ban és ugyanitt

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}\right\} \text{Cauchy–Riemann féle parciális differenciálegyenletek}$$

fennállnak. Ekkor

$$f'(z_0) = u_x'|_{(x_0,y_0)} + j\,v_x'|_{(x_0,y_0)}$$

b) $\boxed{8}$ $f(z) = z\,|z|^2 = (x+iy)(x^2+y^2) = x^3 + xy^2 + i\,(yx^2 + y^3)$ 2

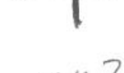
$u = x^3 + xy^2$, $v = yx^2 + y^3$ } tot. deriválhatók, mert az összes parc. derivált $\exists$ és folytonos 1

$u_x' = 3x^2 + y^2$; $u_y' = 2xy$; $v_x' = 2yx$; $v_y' = x^2 + 3y^2$

C-R: $u_x' = v_y'$: $3x^2 + y^2 = x^2 + 3y^2 \Rightarrow x^2 = y^2$ $(y = \pm x)$

$u_y' = -v_x'$ $\quad 2xy = -2yx \Rightarrow xy = 0$

$x = 0 \lor y = 0$



an2v120524/4.

A kettő metszeteként $z=0$-t kapjuk. (4) Tehát f csak $z=0$-ban deriválható és sehol sem reguláris. (1)

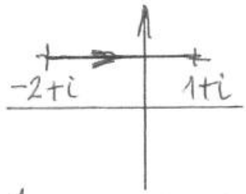
*** 7. feladat (6+3+6=15 pont)**

Határozza meg a következő komplex vonalintegrálok értékét algebrai alakban!
Az L görbe a $(-2+i)$-től $(1+i)$-ig haladó egyenes szakasz, a zárt görbéket egyszer járjuk körbe pozitív irányban.

$$a)\ \int_L \bar{z}\, dz = ? \qquad b)\ \oint_{|z|=1} \frac{\sin(z)}{z+2-i}\, dz = ? \qquad c)\ \oint_{|z|=5} \frac{\sin(z)}{z+2-i}\, dz = ?$$

a.) $\boxed{6}$

$z(t) = t + i\cdot 1 \qquad t: -2 \Rightarrow 1$ (2)



$f(z(t)) = t - i$

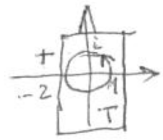
$z'(t) = 1$

$$\int_{-2}^{1} f(z(t))\, z'(t)\, dt = \int_{-2}^{1} (t-i)\, dt = \frac{t^2}{2} - it \Big|_{-2}^{1} = \frac{1}{2} - i - (2+2i) = -\frac{3}{2} - 3i$$ (2) (2)

b.) $\boxed{3}$

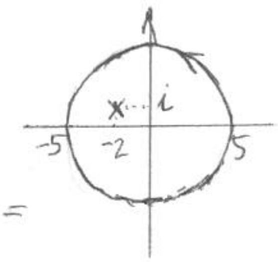
$$\oint_{|z|=1} \frac{\sin z}{z+2-i}\, dz = 0$$ a Cauchy-féle alaptétel miatt (2)

reg T-n (1)



c.) $\boxed{6}$

$$\oint \frac{\sin z}{z-(-2+i)}\, dz = 2\pi i \sin(-2+i)$$ reg. (1) (3)



$\sin(-2+i) = \sin(-2)\cos i + \cos(-2)\sin i =$

$= -\sin 2\, \mathrm{ch} 1 + i \cos 2\, \mathrm{sh} 1$

$\Rightarrow I_c = -2\pi \cos 2 \cdot \mathrm{sh} 1 + i(-2\pi \sin 2 \cdot \mathrm{ch} 1)$ (2)

A $*$-os feladatokból legalább 15 pontot kell elérni.

Pótfeladatok. Csak az elégséges és közepes vizsgajegy eléréséhez javítjuk ki!

8. feladat (5+2+2+1=10 pont)

Határozza meg az alábbi $f(x)$ függvény Taylor-sorát, adja meg a konvergenciasugarat, valamint írja föl elemi műveletekkel a sorban x^6 és x^7 együtthatóját!

$$f(x) = \sqrt[3]{27+x^2}, \qquad T(x) = ?, \qquad R = ?, \qquad a_6 = ?, \qquad a_7 = ?$$

$$f(x) = \sqrt[3]{27}\,\sqrt[3]{1+\frac{x^2}{27}} = 3\left(1+\frac{x^2}{27}\right)^{1/3} = 3\sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/3}{n}\left(\frac{x^2}{27}\right)^n =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{1/3}{n} 3\cdot\left(\frac{1}{27}\right)^n x^{2n} \quad 5 \qquad \left|\frac{x^2}{27}\right| = \frac{|x|^2}{27} < 1 \Rightarrow |x| < \sqrt{27} = R \quad 2$$

$$a_6 = \binom{1/3}{3}\cdot 3\cdot\frac{1}{27^3} = \frac{\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{5}{3}\right)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot 3\cdot\frac{1}{27^3} \quad 2$$

$$a_7 = 0 \quad 1$$

9. feladat (10 pont)

Határozza meg az

$$f(x,y) = \frac{e^{2x+3y}}{\sin^2 x + 2}$$

függvény grafikonját a $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ pontban érintő sík egyenletét!

$$f(x,y) = \frac{e^{2x}}{\sin^2 x + 2}\, e^{3y}$$

$$f'_x = \frac{2e^{2x}(\sin^2 x+2) - e^{2x}\cdot 2\cdot\sin x\cos x}{(\sin^2 x+2)^2}\cdot e^{3y} \quad 3$$

$$f'_y = \frac{e^{2x}}{\sin^2 x+2}\cdot 3\cdot e^{3y} \quad 2$$

Az érintősík egyenlete:

$$f'_x(P_0)(x-x_0) + f'_y(P_0)(y-y_0) - (z - f(P_0)) = 0 \quad 3$$

$$f'_x\left(\tfrac{\pi}{2}, 0\right) = \tfrac{2}{3}e^{\pi}\ ;\ f'_y\left(\tfrac{\pi}{2}, 0\right) = e^{\pi}\ ;\ f\left(\tfrac{\pi}{2}, 0\right) = \frac{e^{\pi}}{3}$$

Az érintő sík:

$$\frac{2}{3}e^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right) + e^{\pi}(y-0) - \left(z - \frac{e^{\pi}}{3}\right) = 0$$