ANALÍZIS(2) **VIZSGADOLGOZAT** **2012. május 31.**
Mérnök Informatikus szak Munkaidő: 90 perc
BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (12 pont)

Határozza meg a következő differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y'' + y' - 2y = 3e^{-2x}$$

(H) $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ (2) $\Rightarrow$ $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$ (1)

$y_H = C_1 e^{-2x} + C_2 e^{x}$ (2)

(I)
$$\begin{array}{r|l} -2\cdot & y_{ip} = A x e^{-2x} \quad (\text{külső rezonancia}) \ (2) \\ 1\cdot & y'_{ip} = A e^{-2x} - 2Axe^{-2x} \\ 1\cdot & y''_{ip} = -2Ae^{-2x} - 2Ae^{-2x} + 4Axe^{-2x} \end{array}$$

$x e^{-2x} \underbrace{(-2A - 2A + 4A)}_{=0} + e^{-2x}(A - 4A) = 3e^{-2x}$

$-3A = 3 \Rightarrow A = -1$

$y_{ip} = -x e^{-2x}$ (3)

$y_{iá} = y_H + y_{ip} = \ldots\ldots$ (2)

2. feladat (12 pont)

Oldja meg a következő differenciálegyenletet $u(x) = 2y + x$ helyettesítéssel!

$$y' = \frac{4y^2 + 4xy + x^2 + 3}{2}$$

(Az általános megoldást explicit, $y = f(x)$ alakban adja meg!)

$u = 2y + x \Rightarrow y = \frac{1}{2}(u - x) \Rightarrow y' = \frac{1}{2}(u' - 1)$

$y' = \frac{(2y+x)^2 + 3}{2} \Rightarrow \frac{1}{2}(u' - 1) = \frac{1}{2}(u^2 + 3)$ (4)

$\Rightarrow u' = u^2 + 4 \Rightarrow \int \underbrace{\frac{1}{u^2+4}}_{\frac{1}{4}\frac{1}{1+\left(\frac{u}{2}\right)^2}} du = \int dx$ (2)

$\frac{1}{4} \frac{\operatorname{arctg} \frac{u}{2}}{\frac{1}{2}} = x + C \quad ; \quad C \in \mathbb{R}$

(2) (1) (1)

an2v-120531/1.

Visszahelyettesítve:

$$\operatorname{arctg}\left(y+\frac{x}{2}\right)=2x+C \quad (1)$$

$$y=\operatorname{tg}(2x+C)-\frac{x}{2} \quad (1)$$

3. feladat (3+6+6=15 pont)

a) Ismertesse a numerikus sorokra tanult gyökkritérium limesz nélküli alakját!

b) Bizonyítsa be az a) pontban ismertetett tételt!

c) Konvergens-e az alábbi sor?

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+3}{2n+4}\right)^{n^2+n}$$

a.) **Gyökkritérium**

b.) **T₂** *Ha* $\forall n \geq N$ *-re* $a_n > 0$ *és*

1. $\sqrt[n]{a_n} \leq q < 1 \implies \sum_{N}^{\infty} a_n$ *konv.*

2. $\sqrt[n]{a_n} \geq 1 \implies \sum_{N}^{\infty} a_n$ *div.*

B 1. $0 < a_n \leq q^n$ és $\sum_{N}^{\infty} q^n$ konvergens $\implies \sum_{N}^{\infty} a_n$ konvergens a majoráns kritérium miatt.

2. $a_n \geq 1 \implies a_n \not\to 0 \implies \sum_{N}^{\infty} a_n$ div. ■

c) $$\sqrt[n]{a_n}=\left(\frac{2n+3}{2n+4}\right)^{n+1} = (\ldots)^n\cdot(\ldots)^1 = \quad (2)$$

$$=\frac{\left(1+\frac{3/2}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{4/2}{n}\right)^n}\underbrace{\left(\frac{1+\frac{3}{2n}}{1+\frac{4}{2n}}\right)}_{1} \longrightarrow \frac{e^{3/2}}{e^{4/2}}=\frac{1}{\sqrt{e}}<1 \quad (3)$$

$\frac{3}{2n}\to 0$, $\frac{4}{2n}\to 0$

$$\implies \sum^{\infty} a_n \text{ konv.} \quad (1)$$

an2v120531/2.

4. feladat (8 pont)

Definiálja a binomiális sort!

Mennyi a sor konvergencia sugara? Ezt az állítását bizonyítsa be!

Binomiális sor: az $f(x)=(1+x)^\alpha$ $(\alpha \neq -1)$ függvény Taylor sora:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \qquad 2$$

Ⓣ $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k \text{ esetén } R=1}$ $\quad 1$

Ⓑ $$a_k = \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$$

5

$$a_{k+1} = \binom{\alpha}{k+1} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(\alpha-k)}{(k+1)!} = \binom{\alpha}{k}\frac{\alpha-k}{k+1}$$

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \left|\frac{\alpha-k}{k+1}\right| = \left|\frac{\frac{\alpha}{k}-1}{1+\frac{1}{k}}\right| \xrightarrow[\infty]{k} |-1| = 1 = \frac{1}{R} \implies R=1$$

■

5. feladat (3+8=11 pont)

a) Definiálja az $f(\underline{x})$ m-változós függvény $\underline{a}$ pontbeli $\underline{e}$ egységvektor irányában vett *iránymenti deriváltját*!

b) Határozza meg a következő iránymenti deriváltat!

$$g(x,y) = \sqrt{x^2+\cos(y)+2}\ , \qquad \left.\frac{dg}{d\underline{e}}\right|_{(1,0)} = ?\ , \qquad \underline{e} \parallel \underline{i} - \underline{j}$$

a) $\left.\dfrac{df}{d\underline{e}}\right|_{\underline{a}} = \lim\limits_{t\to+0} \dfrac{f(\underline{a}+t\underline{e})-f(\underline{a})}{t}$ $\quad 3$

b) $\boxed{8}$

$$g'_x = \frac{1}{2\sqrt{x^2+\cos y+2}}\cdot 2x$$
$$g'_y = \frac{1}{2\sqrt{x^2+\cos y+2}}(-\sin y) \qquad 3$$

$\underline{v} = \underline{i} - \underline{j}$; $|\underline{v}| = \sqrt{2} \Rightarrow \underline{e} = \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\underline{j}$ $\quad 1$

$$\left.\frac{dg}{d\underline{e}}\right|_{(1,0)} = \operatorname{grad} g(1,0)\cdot \underline{e} = \left(\tfrac{1}{2}\underline{i}+0\underline{j}\right)\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\underline{i}-\tfrac{1}{\sqrt{2}}\underline{j}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

2 $\quad$ 2

an2v-120531/3

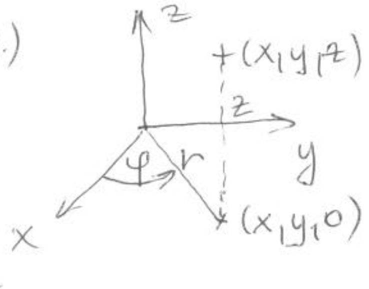
* **6. feladat (8+10=18 pont)**

a) Ismertesse a hengerkoordinátákat egy ábrán, és számolja ki a hengerkoordinátákra való áttérés Jacobi-determinánsát!

b) Határozza meg a következő egyenlőtlenségekkel meghatározott korlátos térrész térfogatát!

$$x^2 + y^2 \le 4\,, \qquad\qquad 0 \le z \le 16 - (x^2 + y^2)$$

a.) 3



Hengerkoordináták: r, φ, z

$x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$
$z = z$

5

$$\mathcal{J} = \det \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} =$$

$$= r\cos^2\varphi + r\sin^2\varphi = r$$

b.) Pl. hengerkoordinátás tr-val:

$0 \le z \le 16 - r^2;\quad 0 \le r \le 2;\quad 0 \le \varphi \le 2\pi$

$$\iiint_V 1\, dV = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{16-r^2} r \, dz \, d\varphi \, dr = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \underbrace{r z \Big|_{z=0}^{16-r^2}}_{16r - r^3} d\varphi \, dr =$$

5

$$= (2\pi - 0) \int_0^2 (16r - r^3)\, dr = 2\pi \left(8r^2 - \frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^2 = 2\pi(32-4)$$

5

M Egyszerűbben: $\iint_{x^2+y^2\le 4} (16 - (x^2+y^2))\, dx\, dy$ -ként is kiszámolható.

* **7. feladat (4+2+4=10 pont)**

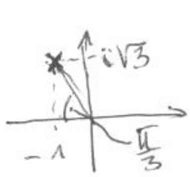
Határozza meg a következő kifejezések értékét algebrai alakban!

$a)\quad \ln(-1 + \sqrt{3}i) = ?\qquad\qquad b)\quad \mathrm{Ln}(-1 + \sqrt{3}i) = ?$

$c)\quad (-1 + \sqrt{3}i)^{2i} = ?$

a.) $|-1+\sqrt{3}\,i| = \sqrt{1+3} = 2$; $\operatorname{arc}(-1+\sqrt{3}\,i) = \frac{2\pi}{3}$

$\ln z = \ln|z| + i \operatorname{arc} z$; $\operatorname{arc} z \in [-\pi, \pi)$



Ezért $\ln(-1+\sqrt{3}\,i) = \ln 2 + i\,\frac{2\pi}{3}$ 4

an2v-12053114.

b.) $\mathrm{Ln}(-1+\sqrt{3}i) = \ln 2 + i\left(\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) \qquad k \in \mathbb{Z}$ $\quad$ 2

c.) $(-1+\sqrt{3}i)^{2i} = e^{2i \,\mathrm{Ln}(-1+\sqrt{3}i)} = e^{2i\left(\ln 2 + i\frac{2\pi}{3}\right)} =$

$= e^{-\frac{4\pi}{3} + i\, 2\ln 2} = e^{-\frac{4\pi}{3}} \cos(2\ln 2) + i\, e^{-\frac{4\pi}{3}} \sin(2\ln 2)$ $\quad$ 4

* **8. feladat (5+9=14 pont)**

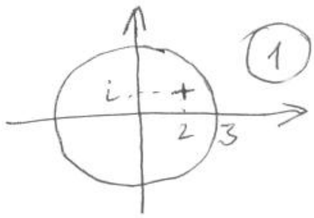
Határozza meg a következő komplex vonalintegrálok értékét algebrai alakban!
Az L görbe a $(2i)$ ponttól (-2) pontig haladó egyenes szakasz, a zárt görbét egyszer járjuk körbe pozitív irányban.

$$a)\quad \int_L \cos 2z \; dz = ? \qquad\qquad b)\quad \oint_{|z|=3} \frac{\mathrm{sh}(z)}{(z-2-i)^2}\; dz = ?$$

a.) $\boxed{5}$ $\quad I_a = \left.\frac{\sin 2z}{2}\right|_{2i}^{-2} = \frac{1}{2}\left(\sin(-4) - \sin 4i\right) =$

$= -\frac{1}{2}\sin 4 - i\,\frac{1}{2}\,\mathrm{sh}\, 4$

b) $\boxed{9}$ $\quad I_b = \oint_{|z|=3} \frac{\mathrm{sh}\, z}{(z-(2+i))^2}\, dz$ $\quad$ reguláris 1



$I_b = \frac{2\pi i}{1!}\left(\mathrm{sh}\, z\right)'\Big|_{z=2+i}$ $\quad$ (Cauchy-féle ált. int. formula) $\quad$ 3

$I_b = 2\pi i \cdot \mathrm{ch}(2+i) = 2\pi i\,(\mathrm{ch}2 \cdot \mathrm{ch}\, i + \mathrm{sh}2\, \mathrm{sh}\, i) =$ $\quad$ 1

$= 2\pi i\,(\mathrm{ch}2 \cos 1 + i\, \mathrm{sh}2 \sin 1) = -2\pi\, \mathrm{sh}2 \sin 1 + i\, 2\pi\, \mathrm{ch}2 \cos 1$ $\quad$ 3

A $*$-os feladatokból legalább 15 pontot kell elérni.

Pótfeladatok. Csak az elégséges és közepes vizsgajegy eléréséhez javítjuk ki!

9. feladat (8 pont)

Oldja meg a következő differenciálegyenletet az $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ tartományon!

$$y' = (2x+1)^6 \; \cos^2(y)$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 y}\, dy = \int (2x+1)^6\, dx \quad 3$$

$$\underset{2}{\operatorname{tg} y} = \frac{1}{2} \int \underset{f' \cdot f^6}{2 \cdot (2x+1)^6}\, dx$$

$$\operatorname{tg} y = \underset{2}{\frac{1}{2}\, \frac{(2x+1)^7}{7}} + \underset{1}{C}$$

10. feladat (12 pont)

Határozza meg a következő függvények $x_0 = 0$ bázispontú Taylor-sorát és a sorok konvergencia sugarát!

a) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{1-3x}}$ b) $g(x) = e^{3x+2}$

a) $\boxed{7}$

$$f(x) = (1+(-3x))^{-\frac{1}{4}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{4}}{n} (-3x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/4}{n} (-3)^n x^n \quad 5$$

$$|-3x| = 3|x| < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{3} \Rightarrow R = \frac{1}{3} \quad 2$$

b) $\boxed{5}$

$$g(x) = e^2 e^{3x} = e^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!} \Bigg|_{u=3x} = e^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!} x^n \quad 4$$

$$R = \infty \quad 1$$