ANALÍZIS (2) **3. VIZSGADOLGOZAT** **2012. június 7.**

Mérnök Informatikus szak Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

1. feladat (20 pont)

a) Mit tudunk a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ hatványsor konvergencia-tartományáról?

Hogyan számolható ki a leírására szolgáló jellemző? (Fogalmazza meg az egyik tanult tételt!)

b) Adja meg a következő hatványsorok konvergencia-tartományát!

b1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-4)^n x^{2n}$ b2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n+1}}{2^n \sqrt[3]{n}} (2x+4)^n$

a.) $\boxed{6}$ $|x-x_0| < R$-ben a sor abszolút konvergens,
$|x-x_0| > R$-ben divergens,
$|x-x_0| = R$: ?-es eset.
($R=0$ és ∞ is lehetséges) (3)

(T) $\alpha := \overline{\lim} \sqrt[n]{|a_n|}$
– $R = \frac{1}{\alpha}$, ha $\alpha > 0$ véges
– $R = \infty$, ha $\alpha = 0$
– $R = 0$, ha $\alpha = \infty$ (3)

b.) $\boxed{6}$ b1) $u := x^2$: $\sum^{\infty} (-4)^n u^n = \sum a_n u^n$

$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{|(-4)^n|} = 4 \xrightarrow[n \to \infty]{} 4 = \frac{1}{R} \Rightarrow R = \frac{1}{4}$ (3)

Végpontok:
$u = -\frac{1}{4}$: $\sum^{\infty} 1$
$u = \frac{1}{4}$: $\sum^{\infty} (-1)^n$
div., mert az ált. tag $\not\to 0$ (nem teljesül a konv. szüks. feltétele)

$-\frac{1}{4} < u < \frac{1}{4}$-re konv. $\Rightarrow$
$\underbrace{-\frac{1}{4} < x^2}_{\forall x\text{-re igaz}} < \frac{1}{4} \Rightarrow |x| < \frac{1}{2}$, tehát K.T.: $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ (3)

b2.) $\boxed{8}$ $\sum^{\infty} \underbrace{\frac{3 \cdot 9^n}{\cancel{2^n} \sqrt[3]{n}} \cancel{2^n}}_{:= b_n} (x+2)^n$ (1)
$x_0 = -2$

an20120607/1.

$$\sqrt[n]{|b_n|} = \frac{\sqrt[n]{3} \cdot 9}{\sqrt[3]{\sqrt[n]{n}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 9 = \frac{1}{R} \Rightarrow R = \frac{1}{9}$$ (4)

$-2-\frac{1}{9}$ -2 $-2+\frac{1}{9}$

Végpontok:

$x = -2-\frac{1}{9}$: $3\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{n}}$ konv. (Leibniz sor)

$x = -2+\frac{1}{9}$: $3\sum^\infty \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 3\sum^\infty \frac{1}{n^{1/3}}$ div. ($\alpha = \frac{1}{3} \not> 1$)

K.T.: $\left[-2-\frac{1}{9}, -2+\frac{1}{9}\right)$ (3)

2. feladat (12 pont)

a) Definiálja az x_0 bázispontú Taylor-sor fogalmát!

b) Adjon elégséges feltételt egy függvény és Taylor sorának egyenlőségére! Bizonyítsa is be!

a.) (D) f akárhányszor differenciálható x_0-ban.

$\boxed{3}$ Taylor sor: $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

b.) Elégséges tétel $f(x) = T(x)$ fennállására:

$\boxed{9}$ (T) Ha f akárhányszor differenciálható $(-R, R)$-en és $f,\ f',\ f'', \ldots, f^{(n)}, \ldots$ deriváltfüggvények egyenletesen korlátosak itt, akkor

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k \qquad x \in (-R, R)\text{-en.}$$

(2)

(B) Már láttuk, hogy

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k}_{T_n(x)=s_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\, x^{n+1}}_{R_n(x)\text{ Lagrange-féle alakja}}$$

Ezért:

$$\underbrace{|f(x) - T_n(x)|}_{=|s(x)-s_n(x)|} = |R_n(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\, x^{n+1}\right| = \frac{\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|}{(n+1)!}\, |x|^{n+1} \le K\, \frac{R^{n+1}}{(n+1)!} := a_n$$

Mivel $a_n \xrightarrow[\infty]{n} 0$ (I. félévi anyagban szerepelt: $\frac{a^n}{n!} \xrightarrow[\infty]{n} 0$), ezért

$$|f(x) - T_n(x)| < \varepsilon, \quad \text{ha} \quad n > N(\varepsilon) \implies T_n(x) \to f(x)\,, \quad \text{azaz} \quad T(x) = f(x).$$ ■

(7)

3. feladat (15 pont)

Oldja meg az alábbi, lineáris differenciálegyenletre vonatkozó kezdeti érték problémát!

$$y' + y\cos x = e^{-\sin x}\,; \qquad y(0) = 1\,.$$

an2o-120607/2.

(H): $y' + y\cos x = 0$

$y_H = C\cdot\varphi(x)$ alakú

$\frac{dy}{dx} = y(-\cos x) \Rightarrow \int\frac{dy}{y} = -\int\cos x\,dx \Rightarrow \ln y = -\sin x$

$\Rightarrow y = e^{-\sin x} = \varphi(x)$ egy megoldás, így

$y_H = C\,e^{-\sin x}$, (5) $C\in\mathbb{R}$

(I): $y_{ip} = c(x)\,e^{-\sin x}$ (1); $y_{ip}' = c'e^{-\sin x} + c\,e^{-\sin x}(-\cos x)$

Behelyettesítve (I)-be:

$c'e^{-\sin x} + \cancel{c\,e^{-\sin x}(-\cos x) + c\,e^{-\sin x}\cdot\cos x} = e^{-\sin x}$

$\Rightarrow c' = 1 \Rightarrow c(x) = x \Rightarrow y_{ip} = x\,e^{-\sin x}$ (5)

$y_{id} = y_H + y_{ip} = (C+x)\,e^{-\sin x}$ (2) $C\in\mathbb{R}$

$y(0)=1$: $1 = (C+0)e^0 \Rightarrow C = 1 \Rightarrow y = (1+x)\,e^{-\sin x}$ (2)

4. feladat (11 pont)

Adja meg az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását!

$$y'' - 2y' + y = \sin x$$

(H): $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$: $(\lambda-1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1$

$y_H = C_1e^x + C_2xe^x$ (4) $C_1, C_2\in\mathbb{R}$

(I):

$$\begin{array}{r|l} 1\cdot & y_{ip} = A\sin x + B\cos x \quad (2) \\ -2\cdot & y_{ip}' = A\cos x - B\sin x \\ 1\cdot & y_{ip}'' = -A\sin x - B\cos x \end{array}$$

$\sin x\,(A+2B-A) + \cos x\,(B-2A-B) = \sin x$

$2B = 1 \Rightarrow B = \frac{1}{2}$ és $-2A = 0 \Rightarrow A = 0$

$y_{ip} = \frac{1}{2}\cos x$ (3)

$y_{id} = y_H + y_{ip} = C_1e^x + C_2xe^x + \frac{1}{2}\cos x$ (2)

5. feladat (15 pont)*

a) Legyen f egy kétváltozós valósértékű függvény! Adjon szükséges feltételt lokális szélsőérték létezésére, és adjon elégséges feltételt is!

b) Vizsgálja az

$$f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$$

függvényt lokális szélsőérték szempontjából!

a.) **Szükséges feltétel differenciálható függvény esetén lokális szélsőérték létezésére:**

$\boxed{6}$

(T) $K_{\underline{a},\delta} \subset D_f$ és f totálisan deriválható $\underline{a}$-ban.
Ha f-nek lokális szélsőértéke van $\underline{a}$-ban, akkor

$$\mathrm{d}f(\underline{a},\underline{h}) = 0 \qquad \forall \quad |\underline{h}| < \delta\text{-ra.}$$

(2)

Elégséges tétel lokális szélsőérték létezésére speciálisan kétváltozós függvényre:

(T) Ha $f \in C^2_{K_{(x_0,y_0),\delta}}$ és

$$D(x,y) := |\underline{\underline{H}}(x,y)| \;\; (= \det\underline{\underline{H}}(x,y)) = \begin{vmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{vmatrix}$$

$f'_x(x_0,y_0) = 0,\;\; f'_y(x_0,y_0) = 0$ és $D(x_0,y_0) > 0$: *van* lok. szélsőérték:
$f''_{xx}(x_0,y_0) > 0$: lok. min.
$f''_{xx}(x_0,y_0) < 0$: lok. max.

(4)

$f'_x(x_0,y_0) = 0,\;\; f'_y(x_0,y_0) = 0$ és $D(x_0,y_0) < 0$: (x_0,y_0)-ban *nincs* lok. szélsőérték
$f'_x(x_0,y_0) = 0,\;\; f'_y(x_0,y_0) = 0$ és $D(x_0,y_0) = 0$: ? (További vizsgálat szükséges)

b.) $\boxed{9}$ $f'_x = 3x^2 - 3y$ és $f'_y = 3y^2 - 3x$ (2)

$f'_x = 0$: $x^2 - y = 0 \Rightarrow y = x^2$

és $f'_y = 0$: $y^2 - x = 0$ $\leftarrow x^4 - x = x(x^3-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ és $y_1 = 0$

vagy $x_2 = 1$ és $y_2 = 1$

Tehát a $P_1(0,0)$ és $P_2(1,1)$ pontokban lehet lok. szé. (3)

$D(x,y) = \begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{vmatrix} = 36xy - 9$ (2)

$D(0,0) = -9 < 0 \Rightarrow P_1$-ben nincs lok. szé. (1)

$D(1,1) = 36 - 9 > 0$ és $f''_{xx}(1,1) = 6 > 0 \Rightarrow P_2$-ben lok. min. van. (1)

6. feladat (8 pont)*

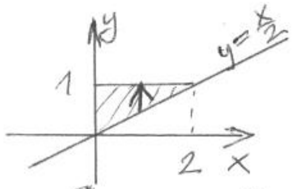
Cserélje fel az integrálok sorrendjét, és számolja ki az integrált!

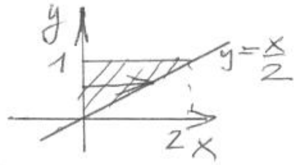
$$\int_{x=0}^{2} \left(\int_{y=x/2}^{1} e^{y^2}\, dy \right) dx$$

an20120607/4.

$\frac{x}{2} \le y \le 1$

$0 \le x \le 2$





$$\int_{y=0}^{1}\int_{x=0}^{2y} e^{y^2}\,dx\,dy = \int_0^1 x\,e^{y^2}\Big|_{x=0}^{2y} dy = \int_0^1 2y\,e^{y^2}dy = e^{y^2}\Big|_0^1 = e-1$$

(4) (2) (2)

7. feladat (8 pont)*

Oldja meg az alábbi egyenleteket!

a) $e^z = 0$ b) $5 + e^{iz} = 0$

(A megoldást algebrai alakban adja meg!)

a.) $e^z = 0$: nincs ilyen z $\left(|e^z| = e^x > 0\right)$

$\boxed{2}$

b.) $e^{iz} = -5 \Rightarrow iz = \ln(-5)$

$\boxed{6}$

$iz = \ln 5 + i(-\pi + 2k\pi) \Rightarrow z = \underbrace{\frac{1}{i}}_{=-i}(\ln 5 + i(-\pi+2k\pi))$

Tehát $z = -\pi + 2k\pi - i\ln 5$

8. feladat (11 pont)*

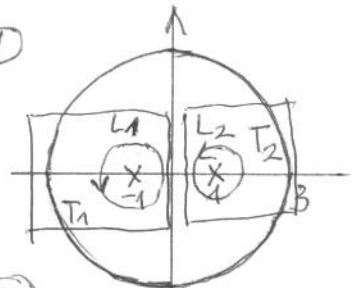
Határozza meg a következő integrál értékét algebrai alakban!

$$\oint_{|z|=3} \frac{\sin(i\,z)}{(z-1)\,(z^2-1)}\,dz$$

$$I = \oint_{L_1} \frac{\frac{i\,\mathrm{sh}z}{(z-1)^2}}{z+1}\,dz + \oint_{L_2} \frac{\frac{i\,\mathrm{sh}z}{z+1}}{(z-1)^2}\,dz = I_1 + I_2$$

$\to$ reg. T_1-en (1) — reg T_2-en (1)

$n+1=2 \Rightarrow n=1$



Szétbontásért, ábráért: (4)

$$I_1 = 2\pi i\,\frac{i\,\mathrm{sh}z}{(z-1)^2}\Big|_{z=-1} = -2\pi\,\frac{\mathrm{sh}(-1)}{4} = \frac{\pi}{2}\,\mathrm{sh}1$$ (2)

$$I_2 = 2\pi i\left(\frac{i\,\mathrm{sh}z}{z+1}\right)'\Big|_{z=1} = 2\pi i^2 \cdot \frac{\mathrm{ch}z\cdot(z+1) - \mathrm{sh}z\cdot 1}{(z+1)^2}\Big|_{z=1} =$$

$$= -2\pi\,\frac{2\,\mathrm{ch}1 - \mathrm{sh}1}{4} = \frac{\pi}{2}(\mathrm{sh}1 - 2\,\mathrm{ch}1)$$ (3)

$$I = I_1 + I_2 = \pi(\mathrm{sh}1 - \mathrm{ch}1)$$

9. feladat (12 pont)

Írja fel a következő függvények $x_0 = 0$ bázispontú Taylor-sorát! Adja meg a konvergencia-tartományukat!

a) $f(x) = \dfrac{2x}{3 - x^2}$

b) $g(x) = x\ \cos(2x^2)$

a.) $f(x) = \frac{2}{3} x \frac{1}{1 - \frac{x^2}{3}} = \frac{2}{3} x \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^2}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3^{n+1}} x^{2n+1}$ (4)

K.T: $\left|\frac{x^2}{3}\right| = \frac{|x|^2}{3} < 1 \Rightarrow |x| < \sqrt{3}$, tehát K.T: $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ (2)

b.) $g(x) = x \left(1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \frac{u^6}{6!} + \ldots\right)\Big|_{u=2x^2} =$

$= x - \frac{2^2}{2!} x^5 + \frac{2^4}{4!} x^9 - \frac{2^6}{6!} x^{13} + \ldots$ (5)

K.T: $(-\infty, \infty)$ (1)

10. feladat (8 pont)

Adja meg az

$$f(x, y) = e^x\ (y + 1)^2\ +\ (x - 1)\ \cos y$$

függvény origóbeli $\underline{e}$ iránymenti deriváltját, ahol $\underline{e} \parallel (1, 2)$.

$\underline{v} = \underline{i} + 2\underline{j} \Rightarrow |\underline{v}| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} \Rightarrow \underline{e} = \frac{1}{\sqrt{5}} \underline{i} + \frac{2}{\sqrt{5}} \underline{j}$ (1)

$f_x' = e^x (y+1)^2 + \cos y$

$f_y' = e^x\, 2(y+1) + (x-1)(-\sin y)$

$\operatorname{grad} f(0,0) = 2\underline{i} + 2\underline{j}$ (3)

$\left.\frac{df}{d\underline{e}}\right|_{(0,0)} = \operatorname{grad} f(0,0) \cdot \underline{e} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \left(= \frac{6}{\sqrt{5}}\right)$ (2) (2)

an20120607/6.