1. feladat (13 pont)

Oldja meg az

$$y''' - 2y'' - 3y' = 16\,e^{-x}$$

differenciál-egyenletet!

(H): $\lambda^3 - 2\lambda^2 - 3\lambda = \lambda(\lambda^2 - 2\lambda - 3) = \lambda(\lambda+1)(\lambda-3) = 0$

$\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = 3$

$y_H = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 e^{3x}$ (5) $C_i \in \mathbb{R}$

(I): $y_{ip} = A x e^{-x}$ (2) (külső rezonancia)

$y_{ip}' = A e^{-x} - A x e^{-x}$

$y_{ip}'' = \underbrace{-Ae^{-x} - Ae^{-x}}_{-2Ae^{-x}} + A x e^{-x}$

$y_{ip}''' = 2Ae^{-x} + Ae^{-x} - Axe^{-x}$

$x e^{-x}(\underbrace{3A - 2A - A}_{=0}) + e^{-x}(-3A + 4A + 3A) = 16\,e^{-x}$

$4A = 16 \Rightarrow A = 4$

$y_{ip} = 4 x e^{-x}$ (4)

$y_{cá} = y_H + y_{ip} = \ldots$ (2)

2. feladat (12 pont)

Adja meg a következő függvények $x_0 = 4$ körüli Taylor-sorát, és annak konvergencia-sugarát!

a) $f(x) = e^{2x}$; b) $g(x) = \dfrac{2}{x-2}$.

a.) $f(x) = e^{2x} = e^{2(x-4)+8} = e^8 e^{2(x-4)} =$

$\boxed{6}$ $= e^8 \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{u^n}{n!}\Big|_{u=2(x-4)} = e^8 \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^n}{n!}(x-4)^n$ (5)

$R_f = \infty$ (1)

an20120614/1.

b.) $\boxed{6}$

$$g(x) = \frac{2}{x-2} = \frac{2}{(x-4)+2} = \frac{2}{2}\,\frac{1}{1-\frac{-(x-4)}{2}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-(x-4)}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n (x-4)^n \quad 4$$

$$|q| = \left|-\frac{x-4}{2}\right| = \frac{|x-4|}{2} < 1 \Rightarrow |x-4| < 2 \Rightarrow R_g = 2 \quad 2$$

3. feladat (14 pont)

Legyen

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^4+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) Létezik-e határértéke f-nek az origóban?

b) $f'_x(x,y) = ?$ (Az origóban is!)

c) Totálisan deriválható-e f az origóban?

a.) $\boxed{6}$

$$\lim_{x\to 0} f(x, mx) = \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot mx}{x^4 + m^2x^2} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2}\,\frac{m}{x^2+m^2} = \frac{1}{m} \quad (m \neq 0)$$

Függ m-től $\Rightarrow$ a határérték $\nexists$

b.) $\boxed{6}$ $(x,y) \neq (0,0)$:

$$f'_x = \frac{y(x^4+y^2) - xy\cdot 4x^3}{(x^4+y^2)^2} \quad 2$$

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0) - f(0,0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0}{h^4} - 0}{h} = \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{0}{h}}_{\equiv 0} = 0 \quad 4$$

d.) $\boxed{2}$ a.) miatt f nem folytonos $(0,0)$-ban $\Rightarrow$ f nem tot. deriválható $(0,0)$-ban.

an20120614/2.

4. feladat (19 pont)

a) A többváltozós függvény totálisan deriválható az $\underline{a}$ pontban. Mit tud a parciális deriváltjairól? Mondja ki és bizonyítsa be a tanult tételt!

b)

$$f(x,y,z) = x^2\,(y+1) + x^z\,, \qquad P_0\,(1,0,2)$$

$\operatorname{grad} f(P_0) = ?$

$\min \left.\dfrac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0} = ?$ Milyen irányban kapjuk? ($\underline{e} = ?$)

a.) $\boxed{8}$

(T)

> Legyen $\underline{a}$ a D_f értelmezési tartomány belső pontja!
> Ha f az $\underline{a}$-ban totálisan deriválható
> $\Longrightarrow$ mindegyik változója szerinti parciális deriváltja $\exists$.

(2)

(Tehát a totális deriválhatóság szükséges feltétele a parciális deriváltak létezése.)

(B) Speciális $\underline{h}$-ra felírjuk a totális deriválhatóság definícióját: $\underline{h} := (0, 0, \ldots, 0, h_k, 0, \ldots, 0)$

$$\Delta f = f(\underline{a} + \underline{h}) - f(\underline{a}) =$$

$$= f(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k + h_k, a_{k+1}, \ldots, a_m) - f(a_1, \ldots, a_m) = A_k \cdot h_k + \varepsilon_k(\underline{h}) \cdot h_k$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{f(a_1, \ldots, a_k + h_k, \ldots, a_m) - f(a_1, \ldots, a_k, \ldots, a_m)}{h_k} = A_k + \varepsilon_k(\underline{h})$$

és ebből $h_k \to 0$ ($\Longrightarrow \underline{h} \to \underline{0}$) esetén $f'_{x_k}(\underline{a}) = A_k$ adódik.

Tehát $\quad \operatorname{grad} f|_{\underline{a}} = \underline{A} = [f'_{x_1}, \ldots, f'_{x_m}]$

(6)

■

b.) $\boxed{11}$

$f'_x = 2x(y+1) + z\,x^{z-1}$ (2)

$f'_y = x^2$ (1)

$f'_z = x^z \cdot \ln x$ (2)

(2) $\operatorname{grad} f(P_0) = f'_x(P_0)\,\underline{i} + f'_y(P_0)\,\underline{j} + f'_z(P_0)\,\underline{k} = 4\underline{i} + \underline{j} + 0 \cdot \underline{k}$

(2) $\min \left.\dfrac{df}{d\underline{e}}\right|_{P_0} = -|\operatorname{grad} f(P_0)| = -\sqrt{16+1} = -\sqrt{17}$

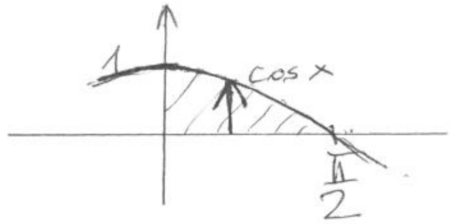
(2) $\underline{e} = -\dfrac{\operatorname{grad} f(P_0)}{|\operatorname{grad} f(P_0)|} = -\dfrac{4}{\sqrt{17}}\,\underline{i} - \dfrac{1}{\sqrt{17}}\,\underline{j}$

an2v-120614/3.

5. feladat (8 pont)* Legyen T az origót a $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ ponttal összekötő szakasz, az y tengely és a $\cos(x)$ görbe által határolt korlátos tartomány!
Határozza meg az alábbi integrál értékét!

$$\iint_T y \sin x \, dT$$

$$\int_{x=0}^{\pi/2} \int_{y=0}^{\cos x} y \sin x \, dy\, dx = \quad (3)$$



$$= \int_0^{\pi/2} \underbrace{\frac{y^2}{2}\Big|_0^{\cos x}}_{\frac{1}{2}\cos^2 x} \sin x \, dx \quad (2) \quad = \frac{1}{2}(-1)\int_0^{\pi/2} \underbrace{(-\sin x)}_{f'} \underbrace{\cos^2 x}_{f^2} \, dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \frac{\cos^3 x}{3}\Big|_0^{\pi/2} = -\frac{1}{6}\Big(\underbrace{\cos^3 \frac{\pi}{2}}_{=0} - \underbrace{\cos^3 0}_{=1}\Big) = \frac{1}{6} \quad (3)$$

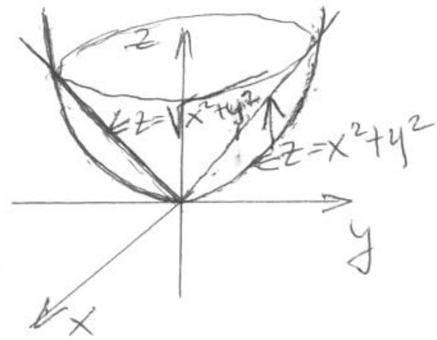
6. feladat (10 pont)*

Számolja ki a $z = x^2 + y^2$ és a $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ felületek által határolt korlátos térrész térfogatát!

(M) $x^2+y^2 \le 1$ esetén $x^2+y^2 \le \sqrt{x^2+y^2}$

Metszésvonal:

$x^2+y^2 = \sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow x^2+y^2 = 1$
(z = 1 síkban)



$x^2+y^2 \le z \le \sqrt{x^2+y^2}$ és $x^2+y^2 \le 1$: a térrész

$$\text{térf} = \iiint_V 1 \, dV = \iint_{x^2+y^2\le 1} \left(\int_{z=x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} 1 \, dz \right) dT = \iint_{x^2+y^2\le 1} \left(\sqrt{x^2+y^2} - (x^2+y^2)\right) dT \quad (3)$$

Polártranszformáció:

$x = r\cos\varphi \qquad |J| = r \qquad 0 \le r \le 1$
$y = r\sin\varphi \qquad\qquad\quad 0 \le \varphi \le 2\pi$

$$\text{térf} = \int_{r=0}^{1} \int_{\varphi=0}^{2\pi} (r - r^2) \underbrace{r}_{|J|} \, d\varphi\, dr = (2\pi - 0)\int_0^1 (r^2 - r^3)\, dr = \quad (4) \quad (1)$$

$$= 2\pi \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4}\right)\Big|_0^1 = 2\pi\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \quad (2)$$

(M) Lehetett volna hengerkoord. tr-val is.

an2v120614/4.

7. feladat (7 pont)* Adja meg a következő komplex számok képzetes részét!

a) $w_1 = \sin(3 - 3i)$

b) $w_2 = \ln(3 - 3i)$

c) $w_3 = e^{3-3i}$

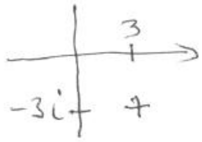
$w_1 = \sin 3 \cdot \cos 3i - \cos 3 \cdot \sin 3i = \sin 3\ \mathrm{ch} 3 - i \cos 3\ \mathrm{sh} 3$

$\mathrm{Im}\, w_1 = -\cos 3\ \mathrm{sh}\, 3$ 2

$w_2 = \ln|3-3i| + i\, \mathrm{arc}(3-3i) =$

$= \ln\sqrt{18} + i\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$\mathrm{Im}\, w_2 = -\frac{\pi}{4}$ 3



$|3-3i| = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$

$\mathrm{arc}(3-3i) = -\frac{\pi}{4}$

$w_3 = e^3\left(\cos(-3) + i(\sin(-3))\right) = e^3 \cos 3 - i e^3 \sin 3$

$\mathrm{Im}\, w_3 = -e^3 \sin 3$ 2

8. feladat (17 pont)*

a) Mondja ki az $f(x+iy) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ komplex függvény differenciálhatóságának elégséges feltételét!

b) Hol deriválható, és hol reguláris az

$$f(x+jy) = 2x^3 + y^2 + i\,(3xy^2)$$

függvény?

c) Mutassa meg, hogy az $u(x,y) = e^x \cos y$ függvény harmonikus az egész síkon!

a) $\boxed{3}$

(T) Elégséges tétel $f'(z_0)$ létezésére:

– Ha u és v parciális deriváltjai léteznek $K_{(x_0,y_0)}$-ban és itt folytonosak

– és a C–R egyenletek teljesülnek (x_0, y_0)-ban, akkor $\exists\, f'(z_0)$.

b.) $\boxed{10}$

$u(x,y) = 2x^3 + y^2$; $v(x,y) = 3xy^2$: parciálisok mindenütt léteznek és folytonosak 1

$u'_x = 6x^2$; $u'_y = 2y$; $v'_y = 6xy$; $v_x = 3y^2$ 2

C–R : $u'_x = v'_y$: $6x^2 = 6xy \Rightarrow 6x(x-y) = 0$

$\Rightarrow (x=0$ vagy $x=y)$

3 $u'_y = -v'_x$: $2y = -3y^2 \Rightarrow (y=0$ vagy $y = -\frac{2}{3})$ } és

$\Rightarrow z_1 = 0$, $z_2 = -\frac{2}{3} + i\left(-\frac{2}{3}\right)$, $z_3 = 0 + i\left(-\frac{2}{3}\right)$ pontokban deriválható 3 és sehol sem reg. 1

an2v120614/5.

c.) $u'_x = e^x \cos y$; $u''_{xx} = e^x \cos y$; $u'_y = -e^x \sin y$; $u''_{yy} = -e^x \cos y$

$\Delta u = u''_{xx} + u''_{yy} = e^x \cos y - e^x \cos y \equiv 0 \Rightarrow u$ harmonikus mindenütt

9. feladat (8 pont) Oldja meg a

$$y' = \frac{x\,y}{\ln y} \qquad (y > 1)$$

differenciálegyenletet! (Elég a megoldást implicit alakban megadni.)

$$\int \frac{1}{y} \ln y \, dy = \int x \, dx \quad 3$$

$f' \quad f^1$

$$\frac{(\ln y)^2}{2} \; 3 = \frac{x^2}{2} \; 1 + C \; 1$$

10. feladat (12 pont)

Írja fel az

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - 5x^2}}$$

függvény $x_0 = 0$ pontra támaszkodó Taylor sorát és adja meg annak konvergencia-sugarát!

Írja fel a sor első négy nem nulla tagját elemi műveletekkel!

$f^{(12)}(0) = ?$

$$f(x) = (1 + (-5x^2))^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-5x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-5)^n x^{2n} = \quad 4$$

$$= 1 + \frac{-1/2}{1}(-5)x^2 + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{1 \cdot 2}(-5)^2 x^4 + \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{1 \cdot 2 \cdot 3}(-5)^3 x^6 + \dots \quad 3$$

$$|-5x^2| = 5|x|^2 < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow R = \frac{1}{\sqrt{5}} \quad 2$$

$$f^{(12)}(0) = 12! \underbrace{a_{12}}_{x^{12} \text{ együtthatója}} = 12! \binom{-1/2}{6} (-5)^6 \quad 3$$

an2v-120614/6.