

## 1. feladat (14 pont)

- a) Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$y' = \frac{(y^2 + 3)x}{(y^2 - 4)e^{-3x^2}}, \quad |y| \neq 2$$

(Elég az implicit alak.)

b)  $a_4 y^{(4)} + a_3 y''' + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0, \quad a_i \in \mathbb{R}$

Írja fel a differenciálegyenlet általános megoldását, ha  $2x + e^{-2x} \sin 3x$  megoldja a differenciálegyenletet.

a)  
[10]

$$\int \underbrace{\frac{y^2 - 4}{y^2 + 3}}_{(y^2+3)-7} dy = \int x e^{3x^2} dx \quad (2)$$

$$\frac{(y^2+3)-7}{y^2+3}$$

$$\int \left(1 - \frac{7}{3} \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{\sqrt{3}}\right)^2}\right) dy = \frac{1}{6} \int 6x e^{3x^2} dx$$

$$y - \frac{7}{3} \frac{\arctg \frac{y}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{6} e^{3x^2} + C \quad (1)$$

(4)      (3)

b.)  
[4]

$$x \text{ megoldás} \Rightarrow \lambda_{1,2} = 0$$

$$e^{-2x} \sin 3x \text{ megoldás} \Rightarrow \lambda_{3,4} = -2 \pm j3$$

A megoldás:

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-2x} \cos 3x + C_4 e^{-2x} \sin 3x \quad C_i \in \mathbb{R}$$

## 2. feladat (15 pont)

- a) Legyen  $f$  legalább  $n+1$ -szer differenciálható  $x_0$  egy környezetében!

Mit nevezünk az  $f$  függvény  $x_0$  bázispontú,  $n$ -edrendű Taylor polinomjának, illetve a hozzá tartozó Lagrange féle maradéktagjának?

- b) Bizonyítsa be, hogy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

a.)

8

- ⑩ A legalább  $n$ -szer differenciálható  $f$  függvény  $x_0$  bázispontú  $n$ -edrendű Taylor polinomja:

$$T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

4

### Lagrange-féle alakban felírt maradéktag

- ⑩ Ha  $f$  legalább  $(n+1)$ -szer differenciálható  $K_{x_0, \delta}$ -ban és  $x \in K_{x_0, \delta}$ , akkor  $\exists \xi \in (x_0, x)$  (ill.  $\xi \in (x, x_0)$ ), hogy

$$f(x) - T_n(x) = R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

9

b.)

- ⑩ Legyen  $f$  legalább  $n$ -szer differenciálható  $K_{x_0}$ -ban. Ekkor

7

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0;$$

Tehát  $R_n(x) = o((x - x_0)^n)$  az  $x_0$ -ban.

- ⑩ A közelítés jóságát mutatja a téTEL.

B)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - T_n(x)}{(x - x_0)^n} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - T'_n(x)}{n(x - x_0)^{n-1}} \stackrel{\text{L'H}}{=} \\ &\stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f''(x) - T''_n(x)}{n(n-1)(x - x_0)^{n-2}} \stackrel{\text{L'H}}{=} \dots \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f^{(n)}(x) - T_n^{(n)}(x)}{n!(x - x_0)^{n-n}} = \frac{0}{n!} = 0 \end{aligned}$$

(Az utolsó tört kivételével a törtek  $\frac{0}{0}$  alakúak, ezért alkalmazhattuk a L'Hospital szabályt.) ■

### 3. feladat (17 pont)

a) Ismertesse a binomiális sort!

Mennyi a konvergenciasugara? Állítását bizonyítsa be!

b)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{1+7x^3}}$$

Határozza meg az  $f$  függvény  $x_0 = 0$  körüli Taylor sorát és annak konvergenciasugarát!  
 $a_9 = ?$  (Elemi műveletekkel adja meg!)

a.)  
9

$$(1+x)^\alpha \underset{\text{esetén }}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

2

$$\textcircled{T} \quad R = 1 \quad \textcircled{1}$$

$$\textcircled{B} \quad a_k = \binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(k-1))}{k!}$$

$$a_{k+1} = \binom{\alpha}{k+1} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k)}{(k+1)!} = \binom{\alpha}{k} \frac{\alpha-k}{k+1}$$

$$\left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \left| \frac{\alpha-k}{k+1} \right| = \left| \frac{\frac{\alpha}{k}-1}{1+\frac{1}{k}} \right| \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 1 = \frac{1}{R} \Rightarrow R=1$$

$$\boxed{8} \quad b.) \quad f(x) = (1+7x^3)^{-1/4} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/4}{k} 7^k x^{3k} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/4}{k} 7^k x^{3k} \quad \textcircled{4}$$

$$|7x^3| = 7|x|^3 < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{\sqrt[3]{7}} = R \quad \textcircled{2}$$

$$a_3 = \binom{-1/4}{3} 7^3 = \frac{(-\frac{1}{4})(-\frac{5}{4})(-\frac{9}{4})}{1 \cdot 2 \cdot 3} 7^3 \quad \textcircled{2}$$

4. feladat (11 pont)

$$f(x, y) = \frac{(y+1) \cos(2x)}{y-2}$$

a)  $f'_x(x, y) = ? ; \quad f'_y(x, y) = ?$

b)  $\underline{e} \parallel -3\underline{i} + 4\underline{j}, \quad \frac{df}{d\underline{e}} \Big|_{\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)} = ?$

c)  $\max \frac{df}{d\underline{e}} \Big|_{\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)} = ? \quad \text{Mely irányban kapjuk ezt az értékét!}$

$\boxed{4} \quad \text{a.) } f'_x = -2 \sin 2x \quad \frac{y+1}{y-2} \quad \textcircled{2}$

$$f'_y = \cos 2x \quad \frac{1 \cdot (y-2) - (y+1)}{(y-2)^2} \quad \textcircled{2}$$

$\boxed{4} \quad \text{b.) } \frac{df}{d\underline{e}} \Big|_{P_0} = \text{grad } f(P_0) \cdot \underline{e} \quad \textcircled{2}$

$$\underline{e} = -\frac{3}{5}\underline{i} + \frac{4}{5}\underline{j} \quad \textcircled{1}$$

$$\text{grad } f(\frac{\pi}{2}, 1) = 0 \cdot \underline{i} + 3 \underline{j}$$

$$\frac{df}{d\underline{e}} = +3 \cdot \frac{4}{5} = +\frac{12}{5} \quad \textcircled{1}$$

$\boxed{3} \quad \text{c.) } \max \frac{df}{d\underline{e}} \Big|_{(\frac{\pi}{2}, 1)} = |\text{grad } f(\frac{\pi}{2}, 1)| = 3 \quad \textcircled{2}$

$$\underline{e} = +\underline{j} \quad \textcircled{1}$$

an2v 090528/3 .

5. feladat (12 pont)\*

Írja fel az

$$f(x) = \begin{cases} -2, & \text{ha } x \in [-\pi, 0) \\ 2, & \text{ha } x \in [0, \pi) \end{cases}, \quad f(x + 2\pi) = f(x)$$

Írja fel az  $2\pi$  szerint periodikus  $f$  függvény Fourier sorát!

Jelölje  $\phi(x)$  a Fourier sor összegfüggvényét!  $\phi(0) = ?$ ,  $\phi(\pi/2) = ?$

Ha a szakadási pontokban megráltoztatják a függvény értékét 0-ra (ez nem változtat az együtthatók kiszámításra szolgáló integrálok értékére), akkor párosan függvény leszünk.

$$\text{Ezért } a_k = 0, \quad k=0,1,\dots \quad (3)$$

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \underbrace{\sin kx}_{\text{páros}} dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} 2 \sin kx dx = \frac{4}{\pi} \frac{-\cos kx}{k} \Big|_0^{\pi} = \\ &= \frac{4}{\pi} \frac{1}{k} \left( -\underbrace{\cos k\pi}_{(-1)^k} + 1 \right) = \begin{cases} 0, & \text{ha } k \text{ páros} \\ \frac{8}{\pi} \frac{1}{k}, & \text{ha } k \text{ páratlan} \end{cases} \quad (4) \end{aligned}$$

$$\phi(x) = \frac{8}{\pi} \left( \sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots \right) \quad (2)$$

$$\phi(0) = 0 \quad (= \frac{f(0-0) + f(0+0)}{2}) \quad (2)$$

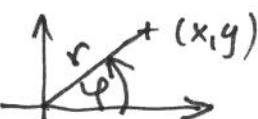
$$\phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \quad (= f\left(\frac{\pi}{2}\right)) \quad (1)$$

6. feladat (15 pont)\*

a) Ismertesse a síkbeli polárkoordinátás transzformációt és vezesse le a Jacobi determinánsának az értékét!

b)

$$\iint_T 5y x^2 dT = ?, \quad T: \quad 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \quad x \geq 0, \quad y \geq x, \quad y \leq \sqrt{3}x$$

a.) 

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi \\ y &= r \sin \varphi \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \exists &= \det \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\varphi \\ y_r & y_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = \\ &= r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r \end{aligned} \quad (5)$$

b)  $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \int_1^{r^2} 5 r \sin \varphi \ r^2 \omega^2 \varphi \ r \ dr \ d\varphi =$  (4)



$$= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \sin \varphi \cos^2 \varphi \underbrace{r^5}_{32-1=31} \Big|_1^2 d\varphi = 31 \cdot \frac{-\cos^3 \varphi}{3} \Big|_{\pi/4}^{\pi/3} = -\frac{31}{3} \left( \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3 \right)$$

7. feladat (16 pont)\*

- a) Igazolja, hogy az  $e^z$  függvény periodikus!  
Oldja meg az  $e^z = 0$  egyenletet!

b) Határozza meg az alábbi integrálok valós és képzetes részét!

$$I_1 = \oint_{|z+1|=1} \frac{e^{jz}}{(z-3)^2} dz, \quad I_2 = \oint_{|z|=4} \frac{e^{jz}}{(z-3)^2} dz$$

a.)  $e^z$   $2\pi j$  szerint periodikus, mert  
 $e^{z+2\pi j} = e^{x+j(y+2\pi)} = e^x (\underbrace{\cos(y+2\pi)}_{=\cos y} + j \underbrace{\sin(y+2\pi)}_{=\sin y}) = e^z$  (3)

$e^z \neq 0$ , mert  $|e^z| = e^x > 0$  ( $\neq z$ , melyre  $e^z = 0$ ) (3)

b.)   $I_1 = 0$ , mert  $\frac{e^{iz}}{(z-3)^2}$  regularis  $T_1$ -en  
(Cauchy-féle alaptétel)



Tehtävä  $\operatorname{Re} I_1 = 0$ ,  $\operatorname{Im} I_1 = -\infty$

$I_2 = \oint_{|z|=4} \frac{e^{jz}}{(z-3)^2} dz$   
 $|z|=4$        $z_0=3$ ;       $n+1=2 \Rightarrow n=1$

A Cauchy-féle általánosított integralformulával:

$$I_2 = \frac{2\pi j}{1!} (e^{jz})' \Big|_{z=3} = 2\pi j j e^{jz} \Big|_{z=3} = -2\pi e^{j3} = -2\pi (\cos 3 + j \sin 3)$$

$$\operatorname{Re} I_2 = -2\bar{u} \cos 3$$

$$\operatorname{Im} I_2 = -2\pi \sin 3$$

Pótfeladatok. Csak az elégséges és a közepes vizsgajegy eléréséhez javítjuk ki.

### 8. feladat (9 pont)

Adja meg az alábbi sor konvergencia tartományát!

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^{n+2}}{n \cdot 3^{2n}} (x-5)^n$$

$$a_n = \frac{9(-3)^n}{n \cdot 9^n} ; \quad x_0 = 5$$

$$\sqrt{|a_n|} = \sqrt{\frac{9 \cdot 3}{n \cdot 9}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \frac{1 \cdot 3}{1 \cdot 9} = \frac{1}{3} = \frac{1}{R} \Rightarrow R = 3 \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x=2 : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9(-3)^n}{n \cdot 9^n} (-3)^n = 9 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ div.} \\ x=8 : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9(-3)^n}{n \cdot 9^n} \cdot 3^n = 9 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{ konv. (Leibniz sor)} \end{array} \right.$$

K. T. :  $(2, 8]$  (1)

### 9. feladat (11 pont)

$$f(x) = \frac{1}{x-3}$$

Írja fel az  $f$  függvény origó körüli, valamint  $x_0 = 4$  körüli Taylor sorait és azok konvergenciasugaraikat!

$$x_0=0: \quad f(x) = -\frac{1}{3} \frac{1}{1-\frac{x}{3}} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} -\frac{1}{3^{n+1}} x^n \quad (3)$$

$$\left| \frac{x}{3} \right| < 1 \Rightarrow |x| < 3 : R_1 = 3 \quad (2)$$

$$x_0=4: \quad f(x) = \frac{1}{(x-4)+1} = \frac{1}{1-(-(x-4))} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-4)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (x-4)^n \quad (4)$$

$$|-(x-4)| = |x-4| < 1 \Rightarrow R_2 = 1 \quad (2)$$