3. Lineáris differenciálegyenletek

A közönséges differenciálegyenletek két nagy csoportba oszthatók lineáris és nemlineáris egyenletek csoportjába. Ez a felbontás kicsit önkényesnek tűnhet, a megoldásra vonatkozó általánosabb összefüggések, hasonlóságok megléte (lineáris) és hiánya (nemlineáris) teszi indokolttá.

Általánosan, az n-edrendű differenciálegyenleten a következőt értjük:

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(x) \tag{3.1}$$

ahol az ismeretlen függvény $y(x)$, $a_i(x)$ *együtthatófüggvények*, ha minden együttható konstans, akkor *állandó-együtthatós* differenciálegyenletről beszélünk. Ha $f(x) \equiv 0$ függvény, akkor homogén a differenciálegyenlet.

3.1. Homogén lineáris differenciálegyenlet

Standard alak:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = 0. \tag{3.2}$$

Tétel: *Homogén lineáris differenciálegyenlet tetszőlegesen kiválasztott megoldásainak bármely lineáris kombinációja is megoldás. (Megjegyzés: ugyanazon az I intervallumon).*

Példa:

1. Az $y'' - y = 0$ egyenletnek megoldása $y_1 = e^{-x}$ és $y_2 = e^x$. Igazoljuk, hogy $y = c_1y_1 + c_2y_2$ is megoldás!

   $$y_1'' = e^{-x},\ y_2'' = e^x \Rightarrow c_1e^x + c_2e^{-x} - (c_1e^x + c_2e^{-x}) = 0$$

   is teljesül.

Feladat:

1. Az $y'' + y = 1$ nemhomogén egyenletnek megoldása $y_1 = 1 + \cos x$ és $y_2 = 1 + \sin x$. Megoldás lesz ezek lineáris kombinációja?

2. Az $y''y - xy' = 0$ nemlineáris egyenletnek megoldása $y_1 = x^2$ és $y_2 = 1$. Megoldás lesz-e ezek lineáris kombinációja?

Tétel: *Ha a* (3.2) *egyenlet együttható függvényei folytonosak az* $[a, b]$ *intervallumon, akkor pontosan egy olyan megoldás függvény van, amely eleget tesz az*

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = x_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$$

kezdeti feltételnek, ahol $x_0 \in (a, b)$.

Definíció: Az I intervallumon értelmezett $f_1(x), \dots, f_k(x)$ függvények halmazát az I intervallumon *lineárisan függetlennek* nevezzük, ha

$$c_1 f_1(x) + \cdots + c_k f_k(x) = 0$$

$$\forall x \in I$$

esetén csak úgy állhat fenn, ha minden c_i együttható nulla. Ellenkező esetben a függvényrendszer *lineárisan összefüggő*.

Megjegyzés: Ha a függvényrendszer lineárisan összefüggő, akkor van közöttük olyan, amely kifejezhető a többi lineáris kombinációjaként.

Példa:

1. Mutassuk meg, hogy az $\{x, 3x, x^2\}$ lineárisan összefüggő bármely intervallumon!

   Az $y_2 = 3y_1 + 0y_3$ egyenlőség bármely $x \in \mathbb{R}$ esetén fennáll.

Feladat:

1. Mutassuk meg, hogy az $\{x, x^2, x^3\}$ függvények lineárisan függetlenek az $-1 \leq x \leq 2$ intervallumon.

Definíció: Az I-n értelmezett $f_1, f_2, \dots, f_k$ és legalább $(k-1)$-szer deriválható függvények Wronski determinánsán a

$$W = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & \dots & f_k(x) \\ f_1'(x) & f_2'(x) & \dots & f_k'(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1^{(k-1)}(x) & f_2^{(k-1)}(x) & \dots & f_k^{(k-1)}(x) \end{vmatrix}$$

determinánst értjük.

Ennek felhasználásával az I-n értelmezett függvények függetlenségének elégséges feltétele:

Tétel: *Ha az I-n értelmezett legalább $(k-1)$-szer differenciálható $f_1, \ldots, f_k$ függvények Wronski determinánsa az I legalább egy pontjában nem nulla, akkor a függvények az I intervallumon lineárisan független rendszert alkotnak.*

Megjegyzés:

1. A bizonyítás nem nehéz.
2. A definícióból nyilvánvaló, hogy ha egy függvényrendszer az I intervallumon összefüggő, akkor annak minden részhalmazán is az. Viszont, ha az I intervallumon lineárisan független, akkor minden olyan intervallumon is az, amely tartalmazza I-t.

Feladat: Döntsük el, hogy az alábbi függvények lineárisan függetlenek-e? Van-e olyan részintervallum, ahol lineárisan összefüggőek?

a.) $\{\ln x, x\}$, $I = (0, \infty)$

b.) $\{2, \cos^2 x, \sin^2 x\}$.

Definíció: Függvények valamely rendszerét a (3.2) egyenlet *alaprendszerének* nevezzük az I-n, ha

a.) n számú I-n értelmezett függvényből áll,

b.) lineárisan függetlenek az I-n

c.) mindegyik függvény megoldása I-n a (3.2)-nek.

Feladat: Igazolja, hogy az $y_1 = e^x$ és $y_2 = e^{-2x}$ függvények az $y'' + y' - 2y = 0$ differenciálegyenletnek alaprendszerét alkotja.

Tétel: *Legyenek a* (3.2)*-ben szereplő $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ együttható függvények folytonosak az $[a, b]$-n. Valamely $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ partikuláris megoldások rendszere, akkor és csak akkor alaprendszere* (3.2)*-nek, ha a függvényrendszer Wronski determinánsa az (a, b)-n sehol nem nulla.*

Feladat: Igazolja, hogy az $y^{(\mathrm{IV})} - 5y'' + 4y = 0$ differenciálegyenletnek az $\{e^{-2x}, e^x, e^{-x}, e^{2x}\}$ alaprendszere.

Tétel: *Ha $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ együttható függvények folytonosak $[a, b]$-n akkor a* (3.2) *egyenletnek az (a, b)-n van alaprendszere.*

Tétel: *Ha* $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ *a (3.2)-nek alaprendszere és* $p_1(x), \dots, p_n(x)$ *folytonosak az* $[a, b]$*-n, akkor bármely* y *megoldás függvény megadható*

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \dots + c_n y_n(x)$$

alakban.

A (3.2) egyenlet általános megoldása az alaprendszer lineáris kombinációjaként adható meg.

Példa: Írja fel az $x^2 y'' - 2y = 4x^3$ differenciálegyenlet általános megoldását, ha ismerjük $y_1 = \frac{1}{x}$ és $y_2 = x^2$ megoldásokat! Ellenőrizzük, hogy függetlenek-e ill., hogy a differenciálegyenletnek alaprendszerét adják-e!

$$W = \begin{vmatrix} \frac{1}{x} & x^2 \\ -\frac{1}{x^2} & 2x \end{vmatrix} = 2 - 1 \neq 0$$

teljesül $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ esetben, tehát a függvények $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ a differenciálegyenlet alaprendszerét alkotják.

$y = c_1 \frac{1}{x} + c_2 x^2$ az általános megoldás.

Adjuk meg az $y(2) = 5$, és $y'(2) = \frac{3}{2}$ kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldást!

Ehhez $y' = -c_1 \cdot \frac{1}{x^2} + 2c_2$ szükséges.

Behelyettesítve:

$$5 = c_1 \cdot \frac{1}{2} + c_2 4$$
$$\frac{3}{2} = -c_1 \cdot \frac{1}{4} + 2c_2$$

lineáris egyenletrendszer megoldásával $c_1 = 2$ és $c_2 = 1$ adódik. Így a keresett partikuláris megoldás:

$$y = 2 \cdot \frac{1}{x} + x^2.$$

Az előzőek alapján, tehát az n-edrendű homogén differenciálegyenlet általános megoldásához először egy alaprendszer meghatározása szükséges. Az egyszerűség és a műszaki gyakorlatban betöltött fontos szerepük miatt szorítkozzunk az állandó együtthatós differenciálegyenletekre.

3.1.1. Állandó együtthatós differenciálegyenlet

Általános alakja

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = 0. \tag{3.3}$$

A megoldást $e^{\lambda x}$ alakban fogjuk keresni, ahol λ konstans. Nem nehéz belátni, hogy az ilyen alakú függvények kielégítik a (3.3) egyenletet.

Definíció: A (3.3) differenciálegyenlet *karakterisztikus egyenletén* az n-edfokú

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \tag{3.4}$$

algebrai egyenletet értjük.

Tétel: *A (3.3) differenciálegyenletnek akkor és csak akkor megoldása az* $e^{\lambda x}$ *függvény, ha* λ *a (3.4) karakterisztikus egyenletnek gyöke.*

Megjegyzés: bizonyítás nem nehéz. Ez azt jelenti, hogy ha λ gyöke (3.4)-nek, akkor az $e^{\lambda x}$ függvény partikuláris megoldása (3.3)-nak.

Az algebra alaptételének felhasználásával tudjuk, hogy az n-edfokú algebrai egyenletnek a komplex számok halmazán n komplex gyöke van a multiplicitásokat is figyelembe véve. Tehát a (3.3) általános megoldásához elő kell állítanunk (3.3) alaprendszerét, ehhez pedig meg kell oldani a (3.4) algebrai egyenletet. Az egyenlet gyökeinek számát figyelembe véve a következő eseteket különböztetjük meg:

1. n db különböző valós gyöke
2. többszörös valós gyöke
3. különböző, de komplex gyöke
4. valós és komplex, többszörös gyöke

van a karakterisztikus polinomnak.

1. eset. Ha n számú különböző valós gyök létezik, akkor $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}\}$ függvényrendszer a (3.3) alaprendszere így $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + c_n e^{\lambda_n x}$ az általános megoldás.

   Megjegyzés: nem nehéz belátni, hogy $\{e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_n x}\}$ valóban alaprendszer.

2. eset. Létezik komplex gyök.

Tudjuk, hogy ha egy valós együtthatós polinomnak a $z = a + bi$ komplex szám gyöke, akkor a konjugáltja $\overline{z} = a - bi$ is gyöke. Felhasználva az Euler formulát és azt, hogy tetszőleges partikuláris megoldások bármely lineáris kombinációja is megoldása az n-edrendű, lineáris homogén egyenletnek adódik, hogy $\lambda = a + bi$ komplex gyök esetén $y_1 = e^{ax}\cos bx$ és $y_2 = e^{ax}\sin bx$ valós függvények szintén kielégítik a (3.4) egyenletet.

Megjegyzés: könnyen belátható, hogy y_1 és y_2 lineárisan függetlenek.

3. eset. Mindegyik valós gyök, de van többszörös gyök. Ebben az esetben $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, \ldots, e^{\lambda_k x}$ $(k < n)$ alakú függvények lineárisan függetlenek, de nem alkotnak alaprendszert. Belátható, ha $e^{\lambda_1 x}$ gyöke (pl. 3-szoros gyöke) a karakterisztikus polinomnak, akkor $xe^{\lambda_1 x}$ és $x^2 e^{\lambda_1 x}$ függvények kielégítik a (3.3) differenciálegyenletet és függetlenek is.

4. eset. Többszörös valós és komplex gyökök is vannak. Ha $\lambda = a + bi$ többszörös komplex gyök, akkor az alaprendszerbe az $x^k e^{ax}\cos bx$ és $x^k e^{ax}\sin bx$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$ függvényeket vesszük be, ha λ m-szeres gyök.

Feladat: Adjuk meg az alábbi differenciálegyenletek általános és az adott kezdeti feltételhez tartozó partikuláris megoldását!

1. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$
2. $y''' - y'' + 100y' - 100y = 0$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 11$, $y''(0) = -299$
3. $y^{\mathrm{V}} - 3y^{\mathrm{IV}} + 3y''' - y'' = 0$

3.2. Inhomogén lineáris differenciálegyenletek

Az n-edrendű inhomogén lineáris differenciálegyenlet

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = f(x) \tag{3.5}$$

és a hozzá tartozó homogén differenciálegyenlet

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y = 0. \tag{3.6}$$

Tétel: *A* (3.5) *egyenlet általános megoldása bármely I intervallumon előállítható egy tetszőleges partikuláris megoldásának és a hozzá tartozó homogén* (3.6) *egyenlet általános megoldásának összegeként.*

Tehát, ha ismerjük a homogén egyenlet alaprendszerét, akkor még meg kell keresnünk az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását. Ezt megtehetjük a már ismert állandó variálásának módszerével. Eszerint a (3.6) általános megoldásában szereplő $c_1, \ldots, c_n$ paramétereket az x változó függvényeinek tekintjük. Az I intervallumon az általános megoldást

$$y = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x) + \cdots + c_n(x)y_n(x)$$

alakban keressük és azt is feltesszük, hogy

$$c_1'(x)y_1^{(i)}(x) + c_2'(x)y_2^{(i)}(x) + \cdots + c_n'(x)y_n^{(i)}(x) = 0, \quad \text{ahol} \quad i = 0, 1, \ldots, n-2$$

és

$$y_1^{(n-1)}c_1'(x) + y_2^{(n-1)}c_2'(x) + \cdots + y_n^{(n-1)}c_n'(x) = f(x)$$

teljesüljön. Erre azért van szükség, hogy az ismeretlenek számával azonos számú egyenletet kapjunk (kvázikonstans tulajdonság). Innen

$$c_1(x) = \int \frac{W_1(x)}{W(x)}\,\mathrm{d}x, \ldots, c_n(x) = \int \frac{W_n(x)}{W(x)}\,\mathrm{d}x$$

adódik, ahol $W(x)$ a (3.6) egyenlet alaprendszerének Wronski determinánsa, $W_i(x)$ az a determináns, amit úgy kapunk, hogy a Wronski determináns i-edik oszlopát a

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f(x) \end{bmatrix}$$

oszloppal helyettesítjük.

Példa: Adjuk meg az általános megoldását a $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumon a $y'' + y = \operatorname{tg}(x)$ egyenletnek. Az $y'' + y = 0$ alaprendszere $\{\cos x, \sin x\}$. Akkor az inhomogén egyenlet partikuláris megoldása $y_p = c_1(x)\cos x + c_2(x)\sin x$.

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1$$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \mathrm{tg}\, x & \cos x \end{vmatrix} = -\mathrm{tg}\,(x)\sin x$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \mathrm{tg}\, x \end{vmatrix} = \sin x$$

$$c_1(x) = -\int \mathrm{tg}\, x \sin x \,\mathrm{d}x = \sin x - \ln\left(\frac{1}{\cos x} + \mathrm{tg}\, x\right) + c_1$$

$$c_2(x) = \int \sin x \,\mathrm{d}x = -\cos x + c_2.$$

Mivel tetszőleges partikuláris megoldást keresünk, legyen $c_1 = c_2 = 0$. Így

$$y_p = \left[\sin x - \ln\left(\frac{1}{\cos x} + \mathrm{tg}\, x\right)\right]\cos x - \cos x \sin x.$$

Az általános megoldás:

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x - \cos x \ln\left(\frac{1}{\cos x} + \mathrm{tg}\, x\right).$$

Megjegyzés: Az inhomogén egyenlet általános megoldásához szükség van a homogén egyenlet alaprendszerére. Ennek meghatározása függvényegyütthatós egyenletek esetén nagyon nehéz is lehet.

3.3. Állandó együtthatós inhomogén lineáris differenciálegyenletek

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = f(x) \tag{3.7}$$

alakú egyenletek általános megoldására az előzőekben említett tételek igazak. Viszont a hozzátartozó homogén egyenlet alaprendszerének meghatározása után az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását megkereshetjük az ún. *próbafüggvény* módszerrel. Ez azt jelenti, hogy y_p az $f(x)$-nek (zavaró függvény) megfelelő alakban keressük.

A módszert egyszerű példán keresztül ismerjük meg.

Példa:

1. Oldjuk meg az $y'' + 4y = 8x^2$ egyenletet. A jelölést használva $f(x) = 8x^2$ a zavaró függvény.

   A hozzá tartozó $y'' + 4y = 0$ homogén egyenlet általános megoldása $y_h = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$.

   Mivel $f(x)$ másodfokú függvény, ezért keressük az inhomogén partikuláris megoldását $y_p = k_2x^2 + k_1x + k_0$ alakban. Akkor $y_p'' = 2k_2$ és ezt helyettesítsük be az eredeti egyenletbe

   $$2k_2 + 4(k_2x^2 + k_1x + k_0) = 8x^2$$

   és keressük azokat a k_2, k_1, k_0 értékeket, amelyre a két polinom azonosan egyenlő lesz. (Egyenlő együtthatók módszere). Így $2k_2 = 8$, $4k_1 = 0$, $2k_2 + 4k_0 = 0$ lineáris egyenletrendszert kapjuk ahonnan $k_2 = 2$, $k_1 = 0$, $k_0 = -1$ adódik. Így $y = y_h + y_p = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x + 2x^2 - 1$.

   Megjegyzés: Az $y_p = k_2x^2$ nem megoldás. Magyarázzuk meg miért?

2. Oldjuk meg az $y'' - 3y' + 2y = e^x$ egyenletet.

   $$y_h = c_1e^x + c_2e^{2x}.$$

   Mivel $f(x) = e^x$ ezért, ha $y_p = ce^x$ alakban keresnénk, akkor az nem lenne megfelelő, mert ez a függvény megoldása a homogén egyenletnek (rezonancia) ezért $y_p = cxe^x$ alakban kell keresnünk. Ha ez is megoldása lenne a homogén egyenletnek (többszörös gyöke lenne a karakterisztikus polinomnak) akkor $y_p = cx^2e^x$ lenne. Helyettesítsük be $y = cxe^x$, $y' = c(e^x + xe^x)$ és $y'' = c(2e^x + xe^x)$ függvényeket az eredeti egyenletbe és az egyenlő együtthatók módszerével azt kapjuk, hogy $c = -1$. Az inhomogén egyenlet általános megoldása tehát $y = c_1e^x + c_2e^{2x} - xe^x$.

   Megjegyzés: Győződjünk meg róla, hogy $y_p = ce^x$ nem lenne megfelelő.

3. Oldjuk meg $y'' + 2y' + 5y = 1.25e^{\frac{1}{2}x} + 40 \cos 4x - 55 \sin 4x$ és $y(0) = 0.2$, $y'(0) = 60.1$ kezdetiérték problémát!

   a.) homogén egyenlet általános megoldása $y_h = e^{-x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$ mivel $f(x)$ több függvénynek az összege ezért legyen $y_p = Ae^{\frac{1}{2}x} + B \cos 4x + C \sin 4x$ alakú. Az y_p, y_p' és y_p'' függvényeknek a behelyettesítésével és az egyenlő együtthatók módszerének felhasználásával az alábbi lineáris egyenletrendszerhez jutunk: $6.25A = 1.25$, $-11B + 8C = 40$, $-8B - 11C = -55$. Innen

   $$y = e^{-x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x) + 0.2e^{\frac{1}{2}x} + 5 \sin 4x.$$

A megadott feltételt kielégítő partikuláris megoldás

$$y = 20e^{-x}\sin 2x + 0.2e^{\frac{1}{2}x} + 5\sin 4x.$$

Különböző zavaró függvények esetén, milyen alakban célszerű keresni egy partikuláris megoldást?

1. táblázat.

$f(x)$	y_p
ke^{ax}	ce^{ax}
kx^n $(n = 0, 1, \ldots)$	$k_n x^n + k_{n-1}x^{n-1} + \cdots k_1 x + k_0$
$\left.\begin{array}{l} k\cos ax \\ k\sin ax \end{array}\right\}$	$K\cos ax + M\sin ax$