4. Laplace transzformáció és alkalmazása

4.1. Laplace transzformált és tulajdonságai

Differenciálegyenletek egy csoportja algebrai egyenletté alakítható. Ennek egyik eszköze a Laplace transzformáció.

Definíció: Legyen $f(t)$ az $[0,\infty)$ intervallumon értelmezett függvény. Ekkor az f *Laplace transzformált*jának nevezzük az alábbi impropius integrált, amennyiben létezik.

$$F(p) = \mathcal{L}(f) = \int_0^\infty e^{-tp} \cdot f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{4.1}$$

Megjegyzés:

1. Az eredeti függvény t-nek függvénye, a transzformált p-nek.
2. Az eredeti $f(t)$ függvény a $F(p)$ *inverz transzformált*ja, (inverze), vagy másként $f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F)$.

Példa:

1. Határozzuk meg a konstans $f(t) = 1$, $t \geq 0$ függvény Laplace transzformáltját!

   Alkalmazva a definíciót:

$$F(p) = \int_0^\infty e^{-pt} \cdot 1\,\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon\to\infty} \int_0^\beta e^{-pt}\,\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon\to\infty} \left[\frac{1}{p} - \frac{e^{-p\varepsilon}}{p}\right] = \frac{1}{p} \quad \text{ha} \quad p > 0.$$

Megjegyzés: Ha $p \leq 0$, az integrál divergens. Miért?

Feladat: Igazolja, hogy $\mathcal{L}(f) = \dfrac{1}{p-a}$, ha $f(t) = e^{at}$, ahol a konstans és $t \geq 0$!

Tétel: *A Laplace transzformáció lineáris operátor. Azaz, ha létezik $f(t)$ és $g(t)$ Laplace transzformáltja, akkor bármely a, b konstansra igaz*

$$\mathcal{L}(af(t) + bg(t)) = a\mathcal{L}(f(t)) + b\mathcal{L}(g(t)).$$

Feladat:

1. Definíció alapján igazolja a tételt!
2. A tétel alkalmazásával adja meg $\mathcal{L}(\mathrm{ch}\,(at))$-t!

Tétel: *Ha $F(p) = \mathcal{L}(f)$ ahol $p > k$, akkor $\mathcal{L}(e^{at}f(t)) = F(p-a)$ ahol $p - a > k$.*

Bizonyítás:

$$F(p-a) = \int_0^\infty e^{-(p-a)t} \cdot f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty e^{-pt} \cdot e^{at} \cdot f(t)\,\mathrm{d}t = \mathcal{L}(f(t) \cdot e^{at}). \qquad \square$$

Megjegyzés: Bonyolultabb $f(t)$ függvények esetén a definícióban szereplő integrál meghatározása hosszú és nehéz lehet, ezért a leggyakrabban előforduló függvények transzformáltjait táblázatokban szokás megadni.

4.2. A transzformált létezése

Az $f(t)$ függvény Laplace transzformáltját a 4.1 improprius integrállal definiáltuk, vagyis csak abban az esetben beszélhetünk az $f(t)$ függvény Laplace transzformaltjáról, ha az integrál konvergens.

Példa:

1. Mutassuk meg, hogy ha $|f(t)| < M$, vagyis $f(t)$ korlátos akkor létezik $\mathcal{L}(f)$.

$$\left|\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \int_0^\infty |e^{-pt}||f(t)|\,\mathrm{d}t < M \cdot \int_0^\infty e^{-pt}\,\mathrm{d}t =$$
$$= -M \lim_{\varepsilon\to\infty} \left[\frac{e^{-pt}}{p}\right]_0^\varepsilon = \frac{M}{p}.$$

2. Mutassuk meg, hogy létezik $\mathcal{L}(f)$, ha $|f(t)| \le Me^{\alpha t}$, ahol $M > 0$ és $0 < \alpha < p$ állandó. Vagyis $f(t)$-hez találunk olyan exponenciális függvényt, amely gyorsabban növekszik. Más szóval, f exponenciális függvénnyel felülről becsülhető

$$\left|\int_0^\infty e^{-pt} \cdot f(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \int_0^\infty e^{-pt} \cdot |f(t)|\,\mathrm{d}t < M \int_0^\infty e^{-pt} \cdot e^{\alpha t}\,\mathrm{d}t =$$
$$= M \int_0^\infty e^{-(p-\alpha)t}\,\mathrm{d}t = -M \lim_{\varepsilon\to\infty} \left[\frac{e^{-(p-\alpha)t}}{p-\alpha}\right]_0^\varepsilon = \frac{M}{p-\alpha}.$$

Tétel: *Az $f(t)$ függvénynek létezik Laplace transzformáltja, ha szakaszonként folytonos az $[0, \infty)$ intervallumon és létezik olyan M és α nemnegatív szám, amelyre*

$$|f(t)| < Me^{\alpha t}.$$

4.3. A derivált Laplace transzformáltja

Tétel: *Ha $f(t)$ folytonos az $[0,\infty)$ intervallumon és $f'(t)$ szakaszosan folytonos és felülről becsülhető $Me^{-\alpha t}$-vel, akkor*

$$\mathcal{L}(f') = p\mathcal{L}(f) - f(0), \quad \text{ha} \quad p > \alpha.$$

Bizonyítás:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(f') &= \int_0^\infty e^{-pt} f'(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\varepsilon\to\infty}\left(\left[e^{-pt}\cdot f(t)\right]_0^\varepsilon + p\int_0^\varepsilon e^{-pt} f(t)\,\mathrm{d}t\right)\\ &= \lim_{\varepsilon\to\infty} e^{-p\varepsilon}\cdot f(\varepsilon) - f(0) + p\mathcal{L}(f) = p\mathcal{L}(f) - f(0).\end{aligned}$$

□

Megjegyzés: Ebből az eredményből már látszik, hogy a Laplace transzformációnak fontos szerepe lesz a kezdeti érték problémák megoldásában.

Feladat: Adja meg a második derivált transzformáltját!

Tétel: *Ha $f(t), f'(t), \ldots, f^{(n-1)}(t)$ folytonos $f^{(n)}$ szakaszonként folytonos az $[0,\infty)$ intervallumon és ezek a függvények exponenciális függvénnyel felülről becsülhetők, akkor*

$$\mathcal{L}(f^{(n)}) = p^n\mathcal{L}(f) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \ldots - f^{(n-1)}(0) \quad \text{ha} \quad p > \alpha.$$

Feladat: Felhasználva az előző tételeket határozza meg $\cos bt$ Laplace transzformáltját!

4.4. A Laplace transzformált deriváltja

Tétel: *Legyen $F = \mathcal{L}(f)$ és f szakaszonként folytonos az $[0,\infty)$-on és az $Me^{-\alpha t}$ exponenciális függvénnyel felülről becsülhető. Akkor minden $p > \alpha$*

$$\mathcal{L}(t^n f(t)) = (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n F}{\mathrm{d}p^n}.$$

Bizonyítás: Felhasználva a korábban tanult Leibniz tételt

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}p} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\int_0^\infty e^{-pt}f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}e^{-pt}\cdot f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_0^\infty e^{-pt}tf(t)\,\mathrm{d}t = \mathcal{L}(tf(t)).$$

□

4.5. Inverz Laplace transzformáció

Az előző fejezetekben láttuk, hogy a Laplace transzformáció olyan operátor, amely az $f(t)$ függvényhez az $F(p)$ függvényt rendeli. A kezdeti érték probléma megoldásához arra is szükség van, hogy megkeressük azt az $f(t)$ függvényt, amelyiknek $F(p)$ a Laplace transzformáltja.

Definíció: Az $F(p)$ Laplace transzformáltján azt az $f(t)$ függvényt értjük, amelyik folytonos az $[0, \infty)$ intervallumon és

$$\mathcal{L}(f) = F.$$

Példa: Határozzuk meg $\mathcal{L}^{-1}(F)$-et, ha

a.) $F(p) = \dfrac{2}{p^3}$

b.) $F(p) = \dfrac{3}{p^2+9}$

c.) $F(p) = \dfrac{p-1}{p^2-2p+5}$.

A megoldáshoz felhasználjuk a 2. táblázatot.

a.) $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{2}{p^3}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{2!}{p^3}\right) = t^2$

b.) $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{3}{p^2+9}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{3}{p^2+3^2}\right) = \sin 3t$

c.) $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{p-1}{p^2-2p+5}\right) = \mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{p-1}{(p-1)^2+2^2}\right) = e^t \cos 2t.$

Tulajdonságok: Ha létezik $\mathcal{L}^{-1}(F_1)$, $\mathcal{L}^{-1}(F_2)$ és folytonosak, akkor

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}(F_1+F_2) &= \mathcal{L}^{-1}(F_1) + \mathcal{L}^{-1}(F_2)\\ \mathcal{L}^{-1}(aF_1) &= a\mathcal{L}^{-1}(F_1).\end{aligned}$$

Megjegyzés: Az inverz Laplace transzformált megkereséséhez, a korábban tanult, és például racionális tört függvények integráljának megkereséséhez használt parciális törtekre bontás módszerét használjuk.

4.6. Alkalmazás kezdetiérték-probléma megoldására

Laplace transzformáció használható lineáris differenciálegyenletek, integrálegyenletek, differenciálegyenletek és parciális differenciálegyenletek bizonyos csoportjának megoldásaira.

Kezdetiérték-probléma megoldásának lépései:

a.) Vegyük az egyenlet mindkét oldalának Laplace transzformáltját.

b.) A tulajdonságok és a kezdeti feltételek felhasználásával kapunk egy egyenletet a megoldás Laplace transzformáltjára.

c.) Inverz Laplace transzformációval megkapjuk a kezdetiérték-probléma megoldását.

Példa: Oldjuk meg az $y'' - 2y' + 5y = -8e^{-t}$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 12$ kezdetiérték-problémát.

a.) $\mathcal{L}(y'') - 2\mathcal{L}(y') + 5\mathcal{L}(y) = \dfrac{-8}{p+1}$.

b.) Legyen $Y(p) = \mathcal{L}(y)$, azaz az ismeretlen, megoldás függvény Laplace transzformáltja. Akkor

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(y') &= pY - y(0) = pY - 2\\ \mathcal{L}(y'') &= p^2Y - py(0) - y'(0) = p^2Y - 2p - 12,\end{aligned}$$

tehát a kezdetiérték-probléma transzformáltja:

$$(p^2Y - 2p - 12) - 2(pY - 2) + 5Y = \frac{-8}{p+1}$$

és ebből $Y(p)$-t kifejezve

$$Y(p) = \frac{2p^2 + 10p}{(p^2 - 2p + 5)(p+1)}.$$

c.) Határozzuk meg $\mathcal{L}^{-1}\left(\dfrac{2p^2 + 10p}{(p^2 - 2p + 5)(p+1)}\right)$-t. Ekkor a táblázatra és a parciális törtekre bontás módszerére lesz szükség.

$$\frac{2p^2 + 10p}{(p^2 - 2p + 5)(p+1)} = \frac{A(p-1) + 2B}{(p-1)^2 + 2^2} + \frac{C}{p+1}\text{-ból következik, hogy}$$

$$A = 3, \quad B = 4 \text{ és } C = -1, \text{ így azt kapjuk, hogy}$$

$$3\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{p-1}{(p-1)^2+2^2}\right) + 4\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2}{(p-1)^2+2^2}\right) - \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{p+1}\right) =$$
$$= 3e^t\cos 2t + 4e^t \sin 2t - e^{-t}.$$

Megjegyzés: Látjuk, nem kellett megkeresnünk az általános megoldást, nem volt szükség integrálásra.

Feladat:

1. Oldja meg a példát más módszerrel!

4.7. Konvolució

Oldjuk meg a következő feladatot Laplace transzformációval

$$y'' + y = g(t), \qquad \text{ahol} \quad y(0) = 0, \qquad y'(0) = 0! \tag{4.2}$$

Legyen $Y(p) = \mathcal{L}(y)$ és $G(p) = \mathcal{L}(g)$, akkor

$$Y(p) = \left(\frac{1}{p^2+1}\right) G(p).$$

Vagyis a kezdetiérték-probléma megoldása a $\sin t$ és $g(t)$ függvény Laplace transzformáltjának szorzata. Tudjuk, hogy általában az integrálok szorzata nem egyenlő a szorzatok integráljával.

Definíció: Legyen $f(t)$ és $g(t)$ a $[0, \infty)$ intervallumon szakaszonként folytonos. Akkor $f(t)$ és $g(t)$ *konvoluciójának* nevezzük a $(f * g)(t) = \int_0^t f(t-v)g(v)\,\mathrm{d}v$ integrált.

Példa: Számoljuk ki t és t^2 konvolucióját!

$$t * t^2 = \int_0^t (t-v)v^2\,\mathrm{d}v = \int_0^t (tv^2 - v^3)\,\mathrm{d}v = \left[\frac{tv^3}{3} - \frac{v^4}{4}\right]_0^t = \frac{t^4}{12}.$$

Megjegyzés: Konvolució nem azonos a szorzattal. Például $1 * 1 = t \neq 1$ és általában $1 * f \neq f$.

Tulajdonságok: Ha $f(t)$, $g(t)$ és $h(t)$ szakaszonként folytonosak $[0, \infty)$ intervallumon, akkor

1. $f * g = g * f$.
2. $f * (h + g) = f * g + f * h$.
3. $f * (g * h) = (f * g) * h$.
4. $f * 0 = 0$.
5. $\mathcal{L}(f * g) = F \cdot G$ vagy $\mathcal{L}^{-1}(F \cdot G) = f * g$.

Visszatérve a (4.2) feladathoz

$$Y(p) = \mathcal{L}(\sin t) \cdot \mathcal{L}(g),$$

vagyis

$$y(t) = \sin t * g(t) = \int_0^t \sin(t - v) g(v)\, \mathrm{d}v.$$

2. táblázat. Táblázat a leggyakrabban használt függvények Laplace transzformáltjával.

$f(t)$	$F(p) = \mathcal{L}(f)$	
1	$\frac{1}{p}$,	ha $p > 0$
e^{at}	$\frac{1}{p - a}$,	ha $p > a$
t^n, $n = 1, 2, \ldots$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$,	ha $p > 0$
$e^{at} t^n$, $n = 1, 2, \ldots$	$\frac{n!}{(p - a)^{n+1}}$,	ha $p > a$
$\sin bt$	$\frac{b}{p^2 + b^2}$,	ha $p > 0$
$\cos bt$	$\frac{s}{p^2 + b^2}$,	ha $p > 0$
$e^{at} \sin bt$	$\frac{b}{(p - a)^2 + b^2}$,	ha $p > a$
$e^{at} \cos bt$	$\frac{p - a}{(p - a)^2 + b^2}$,	ha $p > a$