5. Differenciálegyenlet rendszerek

Elsőrendű explicit differenciálegyenlet rendszer általános alakja:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\
\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} &= f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n) \\
&\vdots \\
\frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}t} &= f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n)
\end{aligned} \tag{5.1}$$

tömörebben:

$$\frac{\mathrm{d}\underline{x}}{\mathrm{d}t} = \underline{f}(t, \underline{x}).$$

Definíció: Legyen $\underline{x}(t)$ az (5.1) megoldása. Az $(n+1)$ dimenziós térben a $t = t$

$$\underline{x} = \underline{x}(t),$$

ahol $t \in I$ egyenletű görbét az (5.1) differenciálegyenlet rendszer *integrálgörbéjének* (*megoldásgörbéjének*), az $\underline{x} = \underline{x}(t)$ egyenletű (n dimenziós térben) a *trajektóriájának* (*pályagörbéjének*) nevezzük. Ha az (5.1)-hez hozzávesszük az $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$ kezdeti feltételeket, akkor kezdetiérték feladatról beszélünk.

5.1. Lineáris rendszerek

Az (5.1) rendszer speciális esete a lineáris differenciálegyenlet rendszer, tömören:

$$\frac{\mathrm{d}\underline{x}}{\mathrm{d}t} = A(t)\underline{x} + \underline{f}(t). \tag{5.2}$$

Ha $\underline{f}(t) \equiv \underline{0}$ akkor homogén differenciálegyenlet rendszerről beszélünk.

$$\frac{\mathrm{d}\underline{x}}{\mathrm{d}t} = A(t)\underline{x}. \tag{5.3}$$

Tétel: *Legyenek $a_{ik}(t)$ és $f_i(t)$ folytonos függvények az I intervallumon. Legyen $t_0 \in I$ és $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, akkor a*

$$\frac{\mathrm{d}\underline{x}}{\mathrm{d}t} = A(t)\underline{x}(t) + \underline{f}(t)$$

$\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$ kezdetiérték-problémának létezik egyértelmű megoldása.

Definíció: Az I intervallumon értelmezett $\underline{x}^1, \underline{x}^2, \ldots, \underline{x}^n$ vektor-skalár függvények Wronski determinánsának nevezzük a

$$W(\underline{x}^1, \underline{x}^2, \ldots, \underline{x}^n) = \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \ldots & x_1^n \\ x_2^1 & x_2^2 & \ldots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^1 & x_n^2 & \ldots & x_n^n \end{vmatrix}$$

determinánst.

Tétel: *Ha $\underline{x}^1, \underline{x}^2, \ldots, \underline{x}^n$ lineárisan összefüggő rendszer az (a, b) intervallumon akkor*

$$W(\underline{x}^1, \underline{x}^2, \ldots, \underline{x}^n) \equiv 0.$$

Megjegyzés: A tétel megfordítása nem igaz! Tekintsük az $\underline{x}^1(t) = \begin{bmatrix} t^n \\ t \end{bmatrix}$ $\underline{x}^2(t) = \begin{bmatrix} t \\ 1 \end{bmatrix}$ $t \in \mathbb{R}$ függvényeket, és ezek Wronski determinánsát

$$W(\underline{x}^1, \underline{x}^2) = \begin{vmatrix} t^2 & t \\ t & 1 \end{vmatrix} = t^2 - t^2 \equiv 0.$$

Viszont $\underline{x}^1$, $\underline{x}^2$ függvények lineárisan függetlenek a $(-\infty, \infty)$ intervallumon.

Definíció: Az (5.3) rendszer $\underline{x}^1, \underline{x}^2, \ldots, \underline{x}^n$ megoldásainak halmazát *alaprendszernek* nevezzük, ha lineárisan függetlenek.

Tétel: (5.3)*-nak van alaprendszere.*

Tétel: (5.3) *bármely $\underline{x}(t)$ megoldása előállítható az alaprendszerben szereplő megoldások lineáris kombinációjaként, és ez az előállítás egyértelmű. Vagyis $\underline{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \underline{x}^i(t)$, és ezt az n paraméteres függvénysereget a* (5.3) *rendszer általános megoldásának nevezzük.*

Definíció: Ha $\{\underline{x}^1, \underline{x}^2, \ldots, \underline{x}^n\}$ (5.3) alaprendszere, akkor az $X(t) = [\underline{x}^1(t), \underline{x}^2(t), \ldots, \underline{x}^n(t)]$ mátrix-függvényt *alapmátrixnak* nevezzük.

Megjegyzés:

1. Alapmátrix reguláris.

2. Adott $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$ kezdeti feltételt kielégítő megoldás

$$\underline{x}(t) = X(t)\underline{c} \quad \text{ahol} \quad \underline{c} = X^{-1}(t_0)\underline{x}_0.$$

Tétel: *Ha $\underline{x}^1$ és $\underline{x}^2$ megoldása az* (5.2) *inhomogén rendszernek, akkor $\underline{x}^1 - \underline{x}^2$ megoldása az* (5.3) *homogén rendszernek.*

Következmény: Ha $\underline{x}^I$ megoldása az (5.2) inhomogén rendszernek, akkor

$$\underline{x}(t) = \underline{x}^I + \sum_{j=1}^{n} c_j \underline{x}^j, \qquad j = 1, \ldots, n$$

összes megoldása az inhomogén rendszernek és ezt nevezzük az általános megoldásának.

A homogén rendszer általános megoldásából az inhomogén rendszer egy partikuláris megoldását megkereshetjük az állandók variálásának módszerével. A partikuláris megoldást $\underline{x}^I = X(t)\underline{c}(t)$ alakban keressük. Ezt, illetve a deriváltját az eredeti (5.2) egyenletbe helyettesítve és az egyenletet rendezve azt kapjuk, hogy $\underline{c}(t) = \int X^{-1}(t)f(t)\,\mathrm{d}t$, ahol $X(t)$ a homogén rendszer alapmátrixa, így $\underline{x}^I(t) = X(t)\int X^{-1}(t)f(t)\,\mathrm{d}t$.

Példa: Oldjuk meg az alábbi rendszert:

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = x_1 + (2-t)x_2 + t^2 + t$$
$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{t}x_1 + \left(\frac{1}{t} - 1\right)x_2 + t,$$

ha tudjuk, hogy $\underline{x}^1(t) = (t^2, t)$ $\underline{x}^2(t) = (t-1, 1)$ a homogén rendszer alaprendszere. (Igazoljuk!). Akkor

$$X(t) = \begin{bmatrix} t^2 & t-1 \\ t & 1 \end{bmatrix}, \qquad X^{-1}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{t} & \frac{1-t}{t} \\ -1 & t \end{bmatrix}$$

$$\underline{f}(t) = \begin{bmatrix} t^2 + t \\ t \end{bmatrix}.$$

Ha

$$X^{-1}(t) \cdot \underline{f}(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ -t \end{bmatrix},$$

akkor

$$\underline{c}(t) = \int \begin{bmatrix} 2 \\ -t \end{bmatrix} \mathrm{d}t = \begin{bmatrix} 2t \\ -\dfrac{t^2}{2} \end{bmatrix},$$

így az inhomogén egyenlet általános megoldása:

$$2t \begin{bmatrix} t^2 \\ t \end{bmatrix} - \frac{t^2}{2} \begin{bmatrix} t-1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_1 \begin{bmatrix} t^2 \\ t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} t-1 \\ 1 \end{bmatrix} = \underline{x}(t).$$

5.1.1. Állandó együtthatós lineáris rendszer

Az (5.2) típusú differenciálegyenlet rendszer megoldására nincs általános módszer. A lineáris rendszerek fontos speciális esete az, amelyben az együttható mátrix minden eleme állandó, tehát

$$\frac{\mathrm{d}\underline{x}}{\mathrm{d}t} = A\underline{x} + \underline{f}(t) \tag{5.4}$$

ha $\underline{f}(t) \equiv \underline{0}$ akkor a rendszer homogén.
Tehát

$$\frac{\mathrm{d}\underline{x}}{\mathrm{d}t} = A\underline{x}. \tag{5.5}$$

Tétel: *Az* (5.5) *rendszer egy alapmátrixa az* $X(t) = e^{At}$ *mátrix.*

Definíció szerint $e^A = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$.

Példa: Ha

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},$$

akkor

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} \dots$$

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k \frac{t^k}{k!} = \begin{bmatrix} \sum (-1)^k \dfrac{t^n}{n!} & 0 \\ 0 & \sum 2^k \dfrac{t^k}{k!} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Tétel: *Legyen* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *az* A $n \times n$*-es mátrix különböző sajátértékei és* $\underline{s}^1, \underline{s}^2, \ldots, \underline{s}^n$ *a hozzátartozó sajátvektor rendszer, akkor a* $\frac{\mathrm{d}\underline{x}}{\mathrm{d}t} = A\underline{x}$ *differenciálegyenlet rendszer egy alaprendszere*

$$\{e^{\lambda_1}\underline{s}^1, e^{\lambda_2}\underline{s}^2, \ldots, e^{\lambda_n}\underline{s}^n\}.$$

Példa:

1. Oldjuk meg a következő kezdeti érték feladatot

$$\underline{x}^1(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix} \underline{x}(t) \qquad \text{és} \qquad \underline{x}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A-nak 3 különböző valós sajátértéke van $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$. A megfelelő sajátvektorok

$$\underline{s}^1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \underline{s}^2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \underline{s}^3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Így az általános megoldás

$$\underline{x}(t) = c_1 e^t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_2 e^{2t} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} + c_3 e^{3t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} -e^t & -2e^{2t} & -e^{3t} \\ e^t & e^{2t} & e^{3t} \\ 2e^t & 4e^{2t} & 4e^{3t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}.$$

Ebből

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tehát a keresett megoldás

$$\underline{x}(t) = e^{2t} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix} - e^{3t} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

2. Határozzuk meg az

$$\underline{x}'(t) = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \underline{x}(t)$$

általános megoldását. Sajátértékek különbözőek, de komplexek $\lambda_1 = -2 + i$, $\lambda_2 = -2 - i$. A λ_1-hez tartozó

$$\underline{s}^1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -i+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

akkor

$$\underline{x}(t) = c_1 \left\{ e^{-2t} \cos t \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} - e^{-2t} \sin t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} +$$
$$+ c_2 \left\{ e^{-2t} \sin t \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} + e^{-2t} \cos t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Azért, hogy a megoldás valós függvény legyen a következő gondolatot alkalmazzuk. Ha $\lambda = \alpha \pm \beta i$ alakú, akkor $\underline{s} = \underline{a} \pm \underline{b} i$ lesz. Ezek felhasználásával két független valós megoldást kapunk

$$\underline{x}^1(t) = e^{\alpha t} \cos \beta t \underline{a} - e^{\alpha t} \sin \beta t \underline{b}$$

és

$$\underline{x}^2(t) = e^{\alpha t} \sin \beta t \underline{a} + e^{\alpha t} \cos \beta t \underline{b}.$$

A mi példánkban $\alpha = -2$, $\beta = 1$, $\underline{a} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Az (5.4) inhomogén rendszer megoldását megkereshetjük az állandók variálásának módszerével.

Példa: Keressük meg az

$$\underline{x}^1(t) = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \underline{x}(t) + \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 1 \end{bmatrix},$$
$$\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

kezdeti érték probléma megoldását!

Az együttható mátrix sajátértékei $\lambda_1 = 1$ és $\lambda_2 = -1$, a sajátvektorok

$$\underline{s}^1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \underline{s}^2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

így az alapmátrix

$$X(t) = \begin{bmatrix} 3e^t & e^{-t} \\ e^t & e^{-t} \end{bmatrix}.$$

$$\underline{x}(t) = X(t)X^{-1}(t_0)\underline{x}_0 + X(t)\int_{t_0}^{t} X^{-1}(s)f(s)\,\mathrm{d}s. \tag{5.6}$$

$$X^{-1}(t) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{-t} & -\frac{1}{2}e^{-t} \\ -\frac{1}{2}e^t & \frac{3}{2}e^t \end{bmatrix}.$$

Az (5.6) formulába behelyettesítve:

$$\underline{x}(t) = \begin{bmatrix} -\frac{9}{2}e^t - \frac{5}{6}e^{-t} + \frac{4}{3}e^{2t} + 3 \\ -\frac{3}{2}e^t - \frac{5}{6}e^{-t} + \frac{1}{3}e^{2t} + 2 \end{bmatrix}$$

lesz.

Mivel állandó együtthatós a differenciálegyenlet rendszer, az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását megkereshettük volna a próba függvény módszerrel is.

Példa: Keressük meg $\underline{x}^1(t) = A\underline{x}(t) + t\underline{f}$ megoldását, ahol

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \underline{f} = \begin{bmatrix} -9 \\ 0 \\ -18 \end{bmatrix}.$$

A homogén egyenlet általános megoldása:

$$\underline{x}(t) = c_1e^{3t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2e^{3t}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_3e^{-3t}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását keressük $\underline{x}_p = t\underline{a} + \underline{b}$ alakban, mivel a zavaró függvény t-nek elsőfokú polinomja. $\underline{x}_p$-t és deriváltját az eredeti egyenletbe helyettesítve és az egyenlő együtthatók módszerét alkalmazva

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \qquad \underline{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

lesz. Így a keresett partikuláris megoldás

$$\underline{x}_p = t\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Feladat: Keressük meg az inhomogén egyenlet általános megoldását, ha

$$\underline{f}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ \sin t \end{bmatrix}, \quad \text{ha} \quad \underline{f}(t) = \begin{bmatrix} t \\ e^t \\ t^2 \end{bmatrix}.$$