4 Distributions particulières de probabilités

4.1 Distributions discrètes usuelles

Les variables aléatoires discrètes sont réparties en catégories selon le type de leur loi.

4.1.1 Variable de Bernoulli

L'expérience stochastique la plus simple est celle qui ne fournit que deux résultats possibles. Ces deux événements sont traditionnellement appelés *succès* A et *échec* $\overline{A}$. On défini alors la variable aléatoire ξ en lui donnant la valeur 1 lors d'une succès et 0 lors d'une échec. La loi de probabilité est alors

$$p(0) = 1 - p \text{ et } p(1) = p$$
$$E(\xi) = 0 \cdot (1 - p) + 1 \cdot p = p$$

et

$$\text{Var}\,(\xi) = p(1 - p).$$

Des expériences stochastiques susceptibles d'être décrites par des *variables aléatoires de Bernoulli* sont

- le jet d'une pièce de monnaie
- en contrôle de qualité, une pièce prélevée au hasard peut être bonne ou défectueuse.

4.1.2 Distribution uniforme discrète

Nous avons considéré des ensembles fondamentaux finis dont chaque élément a la même chance d'apparition. Ce principe d'équiprobabilité donnait lieu à la définition de la loi de probabilité uniforme discrète. En termes de variables aléatoires, on dit qu'une variable discrète ξ obéit à une *loi uniforme discrète* si elle prend comme valeurs, avec des probabilités égales, les entiers successifs de 1 à n :

$$P(\xi = k) = 1/n \text{ où } k = 1, 2, \ldots, n.$$

Le jet d'un dé équilibré constitue l'exemple le plus souvent cité d'une telle variable aléatoire.

4.1.3 Distribution binomiale

Supposons qu'on exécute maintenant n épreuves indépendantes, chacune ayant p pour probabilité de succès et $1-p$ pour probabilité d'échec. La variable aléatoire ξ qui compte le nombre de succès sur l'ensemble des n épreuves est dite *variable aléatoire binomiale* de paramètres (n, p). Une variable de Bernoulli n'est donc qu'une variable binomiale de paramètre $(1, p)$.

La loi de probabilité est donnée par :

$$p(i) = \binom{n}{i} p^i \cdot (1-p)^{n-i} \qquad i = 0, 1, \ldots, n.$$

Pour établir il faut remarquer que toute séquence donnée comportant i succès et $n-i$ échecs pour une longueur totale de n épreuves a pour probabilité $p^i(1-p)^{n-i}$, en vertu de l'indépendance de ces épreuves. Comme il y a $\binom{n}{i}$ de ces séquences comptant i succès et $n-i$ échecs.

En application du théorème du binôme, la somme de tous les $p(i)$ est 1 :

$$\sum_{i=0}^{n} p(i) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = [p + (1-p)]^n = 1.$$

Espérance d'une variable binomiale

$$E(\xi) = \sum_{i=0}^{n} i p(i) = \sum_{i=0}^{n} i \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = n \cdot p.$$

La variance d'une variable binomiale :

$$\text{Var}\,(\xi) = np(1-p).$$

Application de la loi binomiale

Exemple: *On suppose que les réacteurs d'un avion ont, avec probabilité $1-p$, une défaillance en cas cours de vol. Les défaillances se produisent indépendamment les unes des autres. L'avion peut terminer sans difficulté son vol si la moitié de ses réacteurs au moins fonctionnent. Pour quelles valeurs p les quadriréacteurs sont-ils préférables aux biréacteurs ?*

Réponse: Du fait de l'indépendance des défaillances le nombre de réacteurs operationnels jusqu'à la fin du vol est une variable aléatoire binomiale. La probabilité un quadrimoteur d'achever son vol est donc

$$p(2) + p(3) + p(4) = 6p^2(1-p)^2 + 4p^3(1-p) + p^4,$$

pour un biréacteur

$$p(1) + p(2) = 2p(1-p) + p^2.$$

Le quadriréacteur doit être plus sûr lorsque

$$3p^3 - 8p^2 + 7p - 2 \geq 0 \quad \text{ainsi} \quad p \geq \frac{2}{3}.$$

Dans l'exemple suivant nous allons étudier une version simple de la théorie de l'hérédité développée par Gregor Mendel (1822–1884).

Exemple: *On admet qu'un trait physique (telle la couleur des yeux ou le fait d'être gaucher) chez un homme est déterminé par une paire de gènes. On désignera par d le gène de la paire qui est dominant, et par r celui qui est récessif. Une personne portant dd sera ainsi à dominance pure, une autre portant rr sera à caractère récessif, alors que rd entraînera une dominance hybride. Les dominances pure et hybride ne se distinguent pas extérieurement. Un enfant recevra un gène de chacun de ses parents. Si, par un trait particulier, les deux parents sont hybrides et s'ils ont 4 enfants, quelle est la probabilité que 3 de ceux-ci manifestent extérieurement le trait dominant ?*

Réponse: Admettons que chaque enfant a autant de chances de recevoir chacun des deux gènes de chacun de ses parents. Les probabilités que l'enfant de deux parents hybrides porte les gènes dd, rr ou rd sont respectivement $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{2}$. Comme un descendant aura le trait dominant s'il porte les paires de gènes dd ou rd, le nombre d'enfants ainsi conformés est réparti selon la loi binomiale avec pour paramètres $(4, \frac{3}{4})$ dans notre cas. La probabilité cherchée est donc

$$\binom{4}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)^1 = \frac{27}{64}$$

Propriété de la loi binomiale

Théorème: *Soit ξ une variable aléatoire binomiale de paramètres (n, p) avec $0 < p < 1$. Lorsque k croît de 0 à n $P(\xi = k)$ grandit d'abord de manière monotone, puis décroît également de manière monotone, le pic étant atteint lorsque k est égal à la partie entière de $(n+1) \cdot p$.*

Problème: En illustration à ce théorème donner le graphe de la loi d'une variable aléatoire binomiale ayant pour paramètres (10, 1/2).

Remarque: Pour n grand il y a une approximation de $n!$. La formule de Stirling qui affirme que lorsque n est grand $n! \sim \sqrt{n2\pi} \cdot n^n \cdot e^{-n}$.

4.1.4 Distribution de Poisson

Une variable aléatoire ξ pouvant prendre pour valeur $0, 1, 2, \ldots$, est dite *de Poisson avec paramètre* λ s'il existe un réel $\lambda > 0$ tel que

$$p(i) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} \qquad i = 0, 1, 2, \ldots.$$

L'équation définit bien une loi de probabilité puisque

$$\sum_{i=0}^{\infty} p(i) = e^{-\lambda} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1.$$

Cette distribution fut introduite par Siméon Denis Poisson dans un ouvrage traitant des applications de la théorie des probabilités aux problèmes juridiques. Espérance et variance d'une variable de Poisson :

$$E(\xi) = \sum_{i=0}^{\infty} ip(i) = \sum_{i=0}^{\infty} ie^{-\lambda} \frac{\lambda^i}{i!} = \lambda,$$

$$\text{Var}\,(\xi) = \lambda.$$

Applications de la loi de Poisson

- le nombre de coquilles par page ou group de pages d'un livre,
- le nombre de faux numéros teléphoniques composés en un jour,
- le nombre de clients pénétrant dans un bureau de poste donné en l'espace d'un jour,
- le nombre de particules α émises par un matériau radioactif pendant un certain laps de temps.

Exemple: *Admettons que le nombre d'erreurs par page dans un livre suive une distribution de Poisson avec paramètre* $\lambda = 1/2$. *Calculer la probabilité qu'il y ait au moins une erreur sur une page.*

Réponse: Désignons par ξ le nombre d'erreurs sur une page. On aura

$$P(\xi \geq 1) = 1 - P(\xi = 0) = 1 - e^{-1/2} \approx 0.395.$$

Exemple: *On considère l'expérience qui consiste à mesurer le nombre de particules* α *émises dans l'espace d'une seconde par un gramme de matière radioactive. Des expériences ont montré dans le passé qu'en moyenne le nombre de particules* α *émises est 3.2. Donner une approximation pour la probabilité qu'au plus deux particules* α *seront enregistrées.*

Réponse: Représentons-nous le gramme de matière radioactive comme une collection de n atomes. Chacun peut désintégrer, ceci avec une probabilité de $3.2/n$ pour la durée de mesure, et donner une particule α. On peut alors dire que le nombre de particules α émises sera approximativement une variable aléatoire de Poisson de paramètre $\lambda = 3.2$, et l'approximation est ici très bonne. La probabilité cherchée sera ainsi :

$$P(\xi \leq 2) = e^{-3.2} + 3.2 \cdot e^{-3.2} + \frac{(3.2)^2}{2} e^{-3.2} \approx 0.382.$$

Approximation poissonienne de lois binomiales

Les variables aléatoires de Poisson ont un champ d'application fort vaste, en particulier du fait qu'on peut les utiliser pour approximer des variables aléatoires binomiales de paramètres (n, p) pour autant que n soit grand et p assez petit pour que np soit d'ordre de grandeur moyen. Pour s'en convaincre, admettons que ξ soit une variable aléatoire binomiale de paramètres (n, p) et posons $\lambda = np$.

Exemple: *On admet que la probabilité de défaut pour un objet fabriqué à la machine est* 0.1. *Trouver la probabilité qu'un lot de 10 objets comprenne au plus un élément affecté d'un défaut.*

Réponse: La probabilité cherchée est exactement

$$\binom{10}{0}(0.1)^0 \cdot (0.9)^{10} + \binom{10}{1}(0.1)^1 \cdot (0.9)^9 = 0.7361,$$

alors que l'approximation donnée par la loi de Poisson mène à $e^{-1} \cdot \frac{1^0}{0!} + e^{-1} \cdot \frac{1^1}{1!} \approx 0.7358$ puisque $\lambda = 10 \cdot 0.1 = 1$.

Processus de Poisson

Les situations où un événement particulier se reproduit à intervalles réguliers au cours du temps peuvent fournir des cas d'application de la loi de Poisson (par exemple un événement un tremblement de terre, l'entrée d'une personne dans un établissement donnée). Supposons que l'on ait affaire à de tels événements et qu'en plus il existe une constante positive λ pour laquelle les conditions suivantes soient vérifiées :

- La probabilité qu'exactement n événements se réalisent durant un intervalle de longueur t ne dépend que de t et non pas de la position de l'intervalle sur l'axe des temps.

- Si I_1 et I_2 sont deux intervalles de temps disjoints, alors le nombre des événements se réalisant dans I_1 est indépendant du nombre des événements se réalisant dans I_2.
- La probabilité qu'il y ait au moins deux événements dans un intervalle Δt très petit est négligeable par rapport à la probabilité qu'il y ait un seul événement dans Δt.

Ce qui précède aide à comprendre pourquoi les variables aléatoires de Poisson donnent généralement de bonnes approximations de phénomènes très divers tels que par exemple :
- le nombre d'éléctrons libérés par une cathode surschauffée durant une période de longueur donnée,
- le nombre de décès parmi les assurés d'une compagnie d'assurance-vie, sur une période de longueur donnée,
- le nombre de tremblements de terre survenant pendant une période de longueur donnée.

Exemple: *Supposons, que les secousses sismiques dans la moitié ouest des Etats-Unis surviennent de manière telle que les conditions soient satisfaites, λ valant 2 et l'unité de temps étant la semaine. (Ceci revient à dire que des secousses se produisent, en accord avec les trois conditions précitées, au rythme de 2 par semaine). Trouver d'abord la probabilité qu'au moins 3 secousses aient lieu durant les 2 prochaines semaines. Trouver ensuite la distribution de la durée entre maintenant et la prochaine secousse.*

Réponse: Nous aurons

$$\begin{aligned} P(N(2) \geq 3) &= 1 - P(N(2) = 0) - P(N(2) = 1) - P(N(2) = 2) \\ &= 1 - e^{-4} - 4e^{-4} - \frac{4^2}{2}e^{-4} \\ &= 1 - 13e^{-4}. \end{aligned}$$

Quant à la seconde question, désignons par ξ la durée d'attente jusqu'à la prochaine secousse, mesurée en semaines. Du fait que ξ sera supérieure à t si et seulement s'il ne survient aucune secousse durant les t prochaines semaines. Alors

$$P(\xi > t) = P(N(t) = 0) = e^{-\lambda t}$$

et ainsi la fonction de répartition F de ξ sera

$$\begin{aligned} F(t) = P(\xi \leq t) = 1 - P(\xi > t) &= 1 - e^{-\lambda t} \\ &= 1 - e^{-2t}. \end{aligned}$$

4.1.5 Autres lois discrètes

Variables aléatoires géométriques

On exécute une série d'épreuves indépendantes ayant chacune la probabilité p d'être un succès, $0 < p < 1$, jusqu'à obtenir le premier succès. Si l'on désigne le nombre d'épreuves nécessaires jusqu'à ce résultat par ξ on aura

$$P(\xi = n) = (1-p)^{n-1} \cdot p \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

En effet, pour que ξ prenne n pour valuer, il faut et suffit que les $n-1$ premières épreuves soient des échecs tandis que la n-ième devra être un succès.

Du fait que

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\xi = n) = p \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1} = \frac{p}{1-(1-p)} = 1$$

il est établi qu'avec probabilité 1 un succès finira par ce produit.

$$E(\xi) = \frac{1}{p} \qquad \text{et} \qquad \text{Var}\,(\xi) = \frac{1-p}{p^2}.$$

Exemple: *Une urne contient N boules blanches et M noires. On tire des boules une par une avec remise jusqu'à l'apparition d'une noire. Quelle est la probabilité qu'il faille exactement n tirages ? Quelle est la probabilité qu'il faille au moins k tirages ?*

Réponse: ξ est le nombre de tirages nécessaires jusqu'à l'apparition de la première boule noire. $p = \dfrac{M}{M+N}$ alors les deux résultats

1. $P(\xi = n) = \left(\dfrac{N}{M+N}\right)^{n-1} \cdot \dfrac{M}{M+N} = \dfrac{M \cdot N^{n-1}}{(M+N)^n}$,
2. $P(\xi \geq k) = \dfrac{M}{M+N} \displaystyle\sum_{n=k}^{\infty} \left(\dfrac{N}{M+N}\right)^{n-1} = \left(\dfrac{N}{M+N}\right)^{k-1}$.

Variables aléatoires binomiales négatives

On exécute une série d'épreuves indépendantes ayant chacune une probabilité p de donner un succès, $0 < p < 1$, jusqu'à obtenir un total de r succès. Soit ξ le nombre d'épreuves nécessaires pour atteindre ce résultat. On aura

$$P(\xi = n) = \binom{n-1}{r-1} p^r (1-p)^{n-r} \qquad \text{où } n = r, r+1, \ldots,$$

$$E(\xi) = \frac{r}{p}, \qquad \mathrm{Var}\,(\xi) = \frac{r(1-p)}{p^2}.$$

On remarquera qu'une variable géométrique est binomiale négative de paramètre $(1-p)$.

Exemple: (Le problème des allumettes de Banach) *Un mathématicien se trouve être également fumeur de pipe et il porte à tout moment deux boîtes d'allumettes, une dans chacune de ses poches gauche et droite. Chaque fois qu'il a besoin d'une allumette, il a une chance sur deux d'aller la chercher dans sa poche gauche et autant pour l'autre. Il découvre subitement que la boîte tirée est vide. Les deux boîtes contenaient au départ N allumettes chacune. Quelle est la probabilité qu'il lui reste k allumettes dans l'autre boîte, $k = 0, 1, \ldots, N$?*

Réponse: Désignons par E l'événement "le mathématicien découvre que sa boîte droite est vide alors qu'il reste k allumettes dans l'autre". Cet événement n'aura lieu que s'il choisit la boîte droite pour la $(N+1)$-ième fois lors du $N+1+N-k$ tirage. Grâce à la loi de probabilité on peut alors écrire, en prenant $p = \frac{1}{2}$, $r = N+1$, $n = 2N-k+1$,

$$P(E) = \binom{2N-k}{N} \left(\frac{1}{2}\right)^{2N-k+1}.$$

Comme la probabilité est la même que ce soit la poche gauche qui se vide tandis qu'il reste k allumettes dans la droite, la probabilité voulue est

$$2P(E) = \binom{2N-k}{N} \left(\frac{1}{2}\right)^{2N-k}.$$

4.2 Distributions continues usuelles

It existe des variables dont l'ensemble des états possibles est infini non dénombrable. On peut citer par exemple l'heure d'arrivée d'un train à une gare donnée ou encore la durée de vie d'un transistor.

D'après ce qui a été dit dans la section 3., n'importe quelle fonction réelle f, satisfaisant aux conditions

- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$,
- $f(x) \geq 0$ pour tout x réel.

peut être la densité d'une variable aléatoire continue.

4.2.1 Distribution uniforme continue

C'est la distribution continue la plus simple. Une variable aléatoire est *uniforme* sur l'intervalle (a, b) si sa densité est

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } a < x < b \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

A partir de $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, \mathrm{d}t$ on obtient la fonction de distribution,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si} \quad a < x \leq b \\ 1 & \text{si} \quad b < x \end{cases}$$

et

$$E(\xi) = \int_a^b \frac{x}{b-a}\, \mathrm{d}x = \frac{b+a}{2} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Var}\,(\xi) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Exemple: *A partir de 7 heures, les bus passent tout les 15 minutes à un arrêt donné. Il passent donc à 7 h 00, 7 h 15, 7 h 30 et ainsi de suite. Un usager se présente entre 7 h 00 et 7 h 30 à cet arrêt, l'heure exacte de son arrivée étant une variable uniforme sur cette période. Trouver la probabilité qu'il doive attendre de 5 minutes, puis plus de 10 minutes.*

Réponse: ξ est le nombre de minutes s'écoulant à partir de 7 h 00 jusqu'à l'arrivée de l'usager. Alors la probabilité d'attendre moins de 5 minutes est ainsi

$$P(10 < \xi < 15) + P(25 < \xi < 30) = \int_{10}^{15} \frac{1}{30}\, \mathrm{d}x + \int_{25}^{30} \frac{1}{30}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{3}.$$

De même, il n'attendra plus de 10 minutes

$$P(0 < \xi < 5) + P(15 < \xi < 20) = \frac{1}{3}.$$

4.2.2 Distribution exponentielle

Une variable aléatoire dont la densité est donnée par l'équation suivante, où λ est positif,

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est dite *variable aléatoire exponentielle* de paramètre λ. La fonction de distribution,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1 - e^{\lambda x} & \text{si} \quad x > 0. \end{cases}$$

On remarquera que $\displaystyle\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = 1$ comme il se doit.

$$E(\xi) = \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda} \qquad \text{et la variance} \qquad \mathrm{Var}\,(\xi) = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Hormis la loi normale, c'est la loi exponentielle qui est certainement la plus souvent rencontrée dans le travail pratique de l'ingénieur ; parmi les nombreuses applications qu'elle connaît, citons :

- durée de bon fonctionnement d'un équipement technique,
- désintégration radioactive,
- temps séparant les arrivées de deux 'clients' successifs dans l'étude d'un phénomène d'attente.

Loi de fiabilité exponentielle

Dans la pratique, il est souvent admis qu'une durée de vie T obéit à une loi exponentielle ; cette hypothèse est particulièrement bien adaptée à la plupart des composants électroniques. Dans ces conditions

$$\begin{aligned} f(t) &= \lambda e^{-\lambda t} && (t \geq 0) \\ R(t) &= 1 - F(t) = e^{-\lambda t} && (t \geq 0), \end{aligned}$$

$R(t)$ est la probabilité qu'il n'y ait pas de défaillance dans l'intervalle $[0, t]$, et $\tau = 1/\lambda$, la durée de vie moyenne.

La loi exponentielle se distingue par un certain nombre de propriétés intéressantes, comme par exemple les deux suivantes :

- si T obéit à une loi exponentielle, alors le taux de défaillance est constant :

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t} \Leftrightarrow \lambda(t) = \lambda.$$

- Un dispositif à fiabilité exponentielle est '*sans mémoire*' :

$$P(T > t + u \mid T > u) = P(T > t) \qquad \text{ou} \qquad t > 0,\ u > 0.$$

Ceci signifie que la probabilité de bon fonctionnement dans un intervalle $(u, u + t]$ dépend uniquement de la longueur t de cet intervalle, mais non pas de sa position par rapport à l'axe des temps. Notons que la loi exponentielle est la seule loi continue possédant cette propriété.

Exemple: *Le nombre de miles couvert par une batterie de voiture avant défaillance est distribuée exponentiellement et sa valeur moyenne est de 10 000 miles. Une personne souhaite se lancer dans un voyage de 5 000 miles. Avec quelle probabilité terminera-t-elle son voyage sans avarie de batterie ? Que devient cette probabilité si la distribution n'est pas exponentielle"*

Réponse: Soit ξ la durée de vie résiduelle, et $\lambda = \dfrac{1}{10\ 000}$, alors

$$P(\xi > 5\ 000) = 1 - F(5\ 000) = e^{-\frac{1}{2}} \approx 0.604.$$

Si, par contre, la distribution n'est pas exponentielle,

$$(\xi > t + 5\ 000 \mid \xi > t) = \frac{1 - F(t + 5\ 000)}{1 - F(t)}$$

où t est la durée de service de la batterie jusqu'au moment où le voyage commence.

4.2.3 Distribution normale ou gaussienne

Une variable aléatoire ξ est dite *normale avec paramètres* μ *et* σ^2 si la densité ξ est donnée par

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \qquad -\infty < x < \infty.$$

Le graphe de cette densité est une courbe en forme de cloche avec un axe de symétrie vertical en μ et dont les deux points d'inflexion en $\mu \pm \sigma$.

Les grandeurs μ et σ^2 représentent la valeur moyenne de ξ ($E(\xi)$) et une mesure de ses variations (Var (ξ)). Une propriété importante de la famille des variables normales est que si ξ est normalement distribuée avec paramètres μ et σ^2, alors $\eta = a\xi + b$ est normalement distribuée avec paramètres $a\mu + b$ et $a^2\sigma^2$. La densité de η est donnée par

$$f_\eta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}a\sigma} \exp\left\{ -\frac{[x - (a\mu + b)]^2}{2(a\sigma)^2} \right\}.$$

La conséquence importante du résultat est que si ξ est une variable normalement distribuée de paramètres μ et σ^2, la variable $\eta = \frac{\xi-\mu}{\sigma}$ est normalement distribuée de paramètres 0 est 1 ($N(0,1)$). Une variable normale ayant ces deux paramètres est dite *standard* ou *centrée réduite.*

La fonction de répartition d'une variable normale centrée réduite qui est traditionnellement notée

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$$

ne s'exprime pas par des fonctions élémentaires. Les valeurs $\phi(x)$ pour des arguments x non-négatifs sont données dans un tableau. Pour les arguments x négatifs, on calcule $\phi(x)$ grâce à l'équation

$$\phi(x) = 1 - \phi(-x).$$

La démonstration est en exercice.

Bien que la loi normale dépende de deux paramètres, il est possible, par une simple transformation linéaire, de ramener tout calcul la comprenant à un calcul par la loi normale réduite.

En effet, si ξ est du type $N(\mu, \sigma^2)$, la variable aléatoire réduite $\xi^* = (\xi - \mu)/\sigma$ est du type $N(0, 1)$. Il en résulte que

$$P(a \leq \xi \leq b) = P\left(\frac{a-\mu}{\sigma} \leq \xi^* \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right).$$

Pour évaluer des probabilités se rapportant à une variable aléatoire normale, ou n'a donc pas besoin de disposer d'une table spéciale pour chaque paire de paramètres (μ, σ^2) ; il suffit pour cela de connaître les valeurs de la fonction de répartition réduite.

Exemple: *Déterminer la probabilité* $P(3 \leq \xi \leq 8)$ *où* ξ *est du type* $N(5, 4)$. *On trouve*

$$P\left(\frac{3-5}{2} \leq \xi^* \leq \frac{8-5}{2}\right) = P(-1 \leq \xi^* \leq 1.5) = \phi(1.5) - \phi(-1) =$$
$$= \phi(1.5) - (1 - \phi(-1)) = 0.7745.$$

Intervalle symétrique par rapport à μ

Soit ξ une variable aléatoire du type $N(\mu, \sigma^2)$. Déterminer la probabilité que ξ soit comprise dans un intervalle symétrique par rapport à μ dont la longueur est un multiple de l'écart-type σ.

$$P(\mu - \sigma \leq \xi \leq \mu + \sigma) = P(-1 \leq \xi^* \leq 1) = \phi(1) - \phi(-1) =$$
$$= 2\phi(1) - 1 = 0.6827.$$

En général :

$$P(|\xi - \mu| \leq c\sigma) = 2\phi(c) - 1, \qquad \text{c'est une constante.}$$

La distribution normale ou gaussienne occupe une place privilégiée en calcul des probabilité et en statistique ; elle intervient dans la discussion de nombreuses questions théoriques et appliquées. Ce rôle central est essentiellement justifié par le fait que la somme de nombreuses variables aléatoires obéit, dans des conditions très générales, à une loi de probabilité qui est proche d'une loi normale. C'est pourquoi on utilise la loi normale souvent pour décrire des phénomènes aléatoires tels que :

– variations de la longueur de pièces fabriquées en série,
– erreurs accidentelles se produisant lors d'un procédé de mesure,
– fluctuations d'une durée autour de sa valeur nominale.

Exemple: *Lors d'un procès en attribution de paternité, un expert témoigne que la durée de la grossesse, en jours, est de distribution approximativement normale avec paramètres $\mu = 270$ et $\sigma^2 = 100$. L'un des pères putatifs est en mesure de prouver son absence du pays pendant une période s'étendant entre le 290-ième et le 240-ième jour précédant l'accouchement.*

Quelle est la probabilité que la conception de l'enfant ait en lieu plus de 290 jours avant sa naissance au moins de 240 jours avant ?

Réponse: Soit ξ la durée de la grossesse et admettons que le père putatif soit bien le géniteur. Alors la probabilité

$$P(\xi > 290) + P(\xi < 240) = P\left(\frac{\xi - 270}{10} > 2\right) + P\left(\frac{\xi - 270}{10} < -3\right) =$$
$$= 1 - \phi(2) + 1 - \phi(3) = 0.0241.$$

Approximation normale d'une répartition binomiale

Le théorème présenté ci-dessous est connu sous le nom de théorème limite de De Moivre-Laplace. De Moivre fut le premier à l'établir dans le cas particulier $p = \frac{1}{2}$ en 1733, tandis que Laplace a pu généraliser pour toute valeur de p en 1812.

Théorème: *Soit ξ_n le nombre de succès lors de la réalisation de n épreuves indépendantes, la probabilité de réussite pour chaque épreuve étant p. Alors, pour tout $a < b$ on peut écrire*

$$P\left(a \leq \frac{\xi_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq b\right) \to \phi(b) - \phi(a)$$

lorsque $n \to \infty$.

Remarque: Deux approximations de la répartition binomiale ont été proposées : l'approximation de Poisson, satisfaisante lorsque n est grand et lorsque np n'est pas extrême ; l'approximation normale, de laquelle on peut montrer qu'elle est de bonne qualité lorsque $np(1-p)$ est grand.

Exemple: *La taille idéale pour une classe de première année dans un collège donné est de 150 étudiants. La politique de ce collège est d'admettre 450 étudiants et est basée sur la constatation expérimentale que 30% seulement des étudiants admis suivront vraiment le cours. Quelle est la probabilité que le collège se retrouve avec une première classe de plus de 150 étudiants lors d'une année donnée ?*

Réponse: Désigner par ξ le nombre d'étudiants qui suivent effectivement le cours. Cette variable ξ est donc binomiale de paramètres $n = 450$ et $p = 0.3$.

L'approximation normale livre

$$P(\xi \geq 150 \cdot 5) = P\left(\frac{\xi - 450 \cdot 0.3}{\sqrt{450 \cdot 0.3 \cdot 0.7}} \geq \frac{151 - 450 \cdot 0.3}{\sqrt{450 \cdot 0.3 \cdot 0.7}}\right) \approx$$
$$\approx 1 - \phi(1.59) \approx 0.0559.$$

Ainsi, dans moins de 6% des cas seulement la première année aura un effectif supérieur à l'optimum. (On remarquera que ce calcul est basé sur une hypothèse d'indépendance. Laquelle ?)

Relation entre les distributions de Poisson et normale

Dans la mesure où il existe une relation entre la distribution de Poisson et la distribution binômiale, d'une part, et les distributions binômiale et normale, d'autre part, on peut supposer qu'il doit y avoir une relation entre les distributions de Poisson et normale ; c'est, en effet, le cas. On peut montrer que, si ξ est la variable aléatoire de Poisson et $(\xi - \lambda)/\sqrt{\lambda}$ la variable aléatoire réduite correspondante.

$$\lim_{\lambda \to \infty} P\left(a \leq \frac{\xi - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \leq b\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} \, \mathrm{d}x,$$

c'est-à-dire que la distribution de Poisson tend vers la distribution normale quand $\lambda \to \infty$ ou $(\xi - \lambda)/\sqrt{\lambda}$ est *asymptotiquement normale.*