

4. Feladatsor

I. Valószínűségi változó, valószínűség-eloszlások, eloszlásfüggvény

1. Az A, B állandók mely értékeire lesz az F függvény egy X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, ha

- a) $F(x) = A + B \arctg x$ ha x tetszőleges valós szám
 b) $F(x) = A + B/(x+1)$, ha $x \geq 1$, $F(x) = 0$ egyébként?

2. A ξ valószínűségi változó valószínűség-eloszlása a következő:

x:	-1	0	1	2
$P(\xi = x)$	1/4	1/8	1/8	1/2

- a.) Adja meg az eloszlásfüggvényét!
 b.) Adja meg $\eta = \xi^2 - 2\xi + 3$ valószínűség-eloszlását, eloszlásfüggvényét!
 c.) Adja meg a két változó várható értékét!

3. Legyen az X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = 0, \text{ ha } x \leq -1;$$

$$F(x) = 1/4, \text{ ha } -1 < x \leq 0;$$

$$F(x) = 1/3, \text{ ha } 0 < x \leq 1;$$

$$F(x) = 5/6, \text{ ha } 1 < x \leq 2;$$

$$F(x) = 1, \text{ ha } 2 < x.$$

Adjuk meg a X valószínűség-eloszlását!

4. Diszkrét valószínűségi változó valószínűség-eloszlása a következő:

$$P(\mathcal{G} = -1) = \frac{1}{5}, P(\mathcal{G} = 0) = \frac{2}{5}, P(\mathcal{G} = 1) = \frac{2}{5}.$$

- a.) Adja meg az eloszlásfüggvényét!
 b.) Határozza meg az eloszlását a $\xi = \mathcal{G}^2$ valószínűségi változónak!

5. Egy valószínűségi változó F(x) eloszlásfüggvénye:

$$F(x)=0 \quad \text{ha} \quad x \leq -1$$

$$F(x)=1/5 \quad \text{ha} \quad -1 < x \leq 0$$

$$F(x)=(x+1)/4 \quad \text{ha} \quad 0 < x \leq 1$$

$$F(x)=2/3 \quad \text{ha} \quad 1 < x \leq 3$$

$$F(x)=10/12 \quad \text{ha} \quad 3 < x \leq 4$$

$$F(x)=1 \quad \text{ha} \quad 4 < x$$

Adja meg a következő valószínűségeket!

$$P(\xi > 3), P(\xi = -1), P(\xi \leq 1), P(2 < \xi \leq 4).$$

6. Egy kazán termométerén leolvasott hőmérséklet ingadozása olyan valószínűségi változó, amelynek eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x \leq 800^\circ \text{C} \\ 0,1x - 80 & \text{ha } 800^\circ \text{C} < x \leq 810^\circ \text{C} \\ 1 & \text{ha } 810^\circ \text{C} < x \end{cases}$$

- a.) Ha a folyamatra vonatkozó előírás olyan, hogy a hőmérsékletnek 802 és 808 °C között kell lenni, akkor mi a valószínűsége annak, hogy a hőmérséklet nem megfelelő?
 b.) Mi lesz a leolvasott hőmérséklet várható értéke?

II: Sűrűségfüggvény

7. Legyen a ξ sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}x(2-x) & \text{ha } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

- a.) Határozza meg a változó várható értékét!
 b.) Adja meg az eloszlásfüggvényt!
8. Egy vezető bevonat vastagsága olyan valószínűségi változó, amelynek sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = 600x^{-2}, \text{ ha } 100\mu\text{m} < x < 120\mu\text{m}$$

Különben 0.

- a.) Adja meg az eloszlásfüggvényt!
 b.) Számolja ki a várható értéket!
9. Egy oktató úgy tartja az előadását, hogy a vége előtt soha nem fejezi be, de két percnél többet soha nem vesz el a szünetből. A ξ valószínűségi változó jelentse azt, hogy egy adott napon hány perccel tartja tovább az előadást. A változó eloszlása az alábbi sűrűségfüggvénnyel jellemezhető:

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 & \text{ha } 0 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

- a.) Határozza meg k paraméter értékét!
 b.) Mi a valószínűsége, hogy a következő előadás alkalmával a csúszás nem lesz több 1 percnél?
 c.) Mi a valószínűsége, hogy a szünet legalább 1,5 perccel rövidebb lesz?
10. Legyen X sűrűségfüggvénye a következő:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}(2+x) & \text{ha } -A < x < 0 \\ \frac{1}{4}(2-x) & \text{ha } 0 \leq x \leq A \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$

- a) Határozza meg az A értékét!
- b) Írja fel a valószínűségi változó eloszlásfüggvényét!
- c) Ábrázolja a sűrűség- és eloszlásfüggvényt!
- d.) Mi a valószínűsége annak, hogy $X > 1$?

11. Tegyük fel, hogy egy szennyező részecske mérete olyan valószínűségi változó, amelynek sűrűségfüggvénye,

$$f(x) = \begin{cases} 2x^{-3} & \text{ha } x > 1 \\ 0 & \text{különbén} \end{cases}$$

(Mikrométerben)

- a.) Igazolja, hogy $f(x)$ valóban sűrűségfüggvény!
- b.) Adja meg az eloszlásfüggvényét!
- c.) Határozza meg a várható értékét!
- d.) Mi annak a valószínűsége, hogy egy részecske mérete kisebb, mint 5 mikrométer?
- e.) Optikai úton akkor lehet kimutatni a szennyeződést, ha a részecske mérete nagyobb, mint 7 mikrométer. A részecskék hány %-a mutatható ki optikai úton?
- f.) Létezik-e szórása a valószínűségi változónak?

12. Egy valószínűségi változó sűrűségfüggvénye a következő:

$$f(x) = \begin{cases} cx+3 & \text{ha } -3 \leq x \leq -2 \\ 3-cx & \text{ha } -2 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{különbén} \end{cases}$$

- a.) Adja meg a c paraméter értékét!
- b.) Határozza meg a változó eloszlásfüggvényét!