8. Feladatsor

Többdimenziós eloszlások

I. Diszkrét eloszlások

1. A (ξ,η) valószínűségi vektorváltozó együttes valószínűség-eloszlását a tartalmazza a következő táblázat:

ξ\ η	**-1**	**0**	**1**
1	1/6	1/4	1/6
2	1/12	1/12	1/4

a.) Adja meg az együttes eloszlásfüggvényt!
b.) Adja meg a két változó kovarianciáját!

2. Két kockával dobunk. Jelentse X az egyiken, Y a másikon dobott számot. Írjuk fel a (X,Y) kétdimenziós valószínűségi változó eloszlását és eloszlásfüggvényét!

3. A sík következő koordinátájú pontjaiból kaphatunk rádióüzeneteket, a megadott valószínűségekkel. Készítsen rajzot hozzá!

X\Y	**0**	**0.5**	**4**
-1	1/12	1/12	1/6
2	1/6	1/6	1/3

a.) Adjuk meg az X és Y koordináták eloszlását!
b.) Függetlenek-e a koordináták?

4. Egy dobozban 30 darab 40 wattos, 30 darab 60 wattos és 40 darab 100 wattos villanykörte van. Kiveszünk véletlenszerűen, visszatevés nélkül 20 villanykörtét. Jelentse ξ a mintában szereplő 40 wattos égők számát, η pedig a 60 wattos égők számát!
a.) Írjuk fel a (ξ,η) kétdimenziós valószínűségi változó valószínűség-eloszlását!
b.) Számítsuk ki ξ peremeloszlását!

5. A (ξ,η) lehetséges értékeit és együttes valószínűség-eloszlását az alábbi táblázat tartalmazza.
a.) Adja meg a p paraméter értékét!
b.) Számítsuk ki a következő valószínűségeket:
$P(\xi = i, \eta = 0)$ ahol (i = 0, 1, 2); $P(\xi < 2 \mid \eta = 0)$; $P(\xi \geq 1 \mid \eta = 1)$; $P(\eta = 1 \mid \xi \geq 1)$!

ξ\ η	**0**	**1**
0	p	p
1	p	3p
2	2p	4p

c.) Írja fel $M(\eta \mid \xi)$ eloszlását!

6. Egy piros és egy kék kockával dobunk. Legyen X a piros kockán dobott szám, Y pedig a két szám összege! Számítsuk ki Y-nak az X = 3 eseményre vonatkoztatott feltételes várható értékét!

7. ξ és η együttes valószínűség-eloszlását a következő táblázat tartalmazza.
Írja fel $M(\eta \mid \xi)$ eloszlását!

η\ξ	**1**	**2**	**3**
1	1/12	0	2/12
2	2/12	1/12	3/12
3	0	2/12	1/12

8. Az (ξ,η) valószínűségi vektorváltozó együttes valószínűség-eloszlását tartalmazza az alábbi táblázat.

ξ\η	**1**	**0**	**2**
-1	p	q	p
1	q	p	q

a.) Határozza meg p és q paraméterek értékét, ha tudjuk, hogy a valószínűségi változók korrelálatlanok!
b.) Függetlenek-e a változók?

9. Két valószínűségi változó együttes valószínűség-eloszlását tartalmazza az alábbi táblázat:

X\Y	**0**	**1**	**2**
0	1/4	0	1/4
1	0	1/2	0

a.) Adja meg az együttes eloszlásfüggvényt, és a perem eloszlásokat!
b.) Független-e a két változó? Hanem, akkor adja meg a korrelációs együttható értékét!

10. Az (X,Y) kétdimenziós valószínűségi változó lehetséges értékeit a (0,0) ; (0,4) ; (4,0); (4,4) pontok által meghatározott négyzet belsejében levő egész koordinátájú pontok alkotják. Az (X,Y) bármelyik értékét egyenlő valószínűséggel veszi fel a négyzet középpontja kivételével, amely négyszer akkora valószínűséggel következik be, mint a többi. Számítsuk ki X és Y korrelációs együtthatóját, és állapítsa meg, független-e ez a két valószínűségi változó.

11. Két valószínűségi változó együttes valószínűség-eloszlását tartalmazza az alábbi táblázat.
    a.) Milyen értékeket vehet fel ε ?
    b.) Írja fel az együttes eloszlásfüggvényt, ha ε=1/8 .
    c.) Függetlenek-e a változók?

$\xi\backslash\eta$	0	1
-1	¼-ε	¼+ ε
0	¼+ ε	¼-ε

II. Folytonos eloszlások

1. Határozzuk meg, hogy az A paraméter milyen értéke mellett lehet az $f(x,y) = x^2 + Ay^2$ függvény a ($0 < x < 1$, $0 < y < 2$) tartományban egy kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvénye.
   a.) Írjuk fel a perem sűrűségfüggvényeket!
   b.) Határozza meg az $M(X|Y = y)$ feltételes várható értéket!

2. Legyen a ξ és η valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye:
$$f_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} \frac{6}{7}(x^2 + \frac{xy}{2}), & \text{ha} \quad 0 < x < 1 \quad \text{és}\, 0 < y < 2 \\ 0 & \text{különben} \end{cases}$$
   a.) Mutassuk meg, hogy ez valóban sűrűségfüggvény!
   b.) Írjuk fel együttes eloszlásfüggvényüket és perem-eloszlásfüggvényeket!
   c.) Adjuk meg a $P(\xi > 0.5, \eta < 1)$ valószínűséget!
   d.) Függetlenek-e a valószínűségi változók?

3. A ξ valószínűségi változó jelentse egy kémiai anyag felületi feszültségét, η a savasságát. A skálázást úgy végezzük, hogy ξ 0 és 2 között, η 2 és 4 között vesz fel értékeket. A valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye:
$$f(x,y) = \begin{cases} \lambda\,(6 - x - y) & ha \qquad 0 \le x \le 2 \;\; és \;\; 2 \le y \le 4 \\ 0 & különben \end{cases}$$
   a.) Határozza meg a λ paraméter értékét.
   b.) Adja meg a feltételes sűrűségfüggvényt.
   c.) Függetlenek-e a valószínűségi változók?

4. Adja meg az X valószínűségi változó perem eloszlásfüggvényét, ha az X és Y valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye adott: $f(x,y) = \dfrac{y^3 + y}{6} e^{1-x} \; ha \quad 1 < x \quad és \quad 0 < y < 2$ különben 0!

5. Adott két független, örökifjú tulajdonságú valószínűségi változó. Az egyik várható értéke 2, a másiké 4. Írja fel az együttes sűrűségfüggvényüket!

III. Vegyes feladatok

1. Mi lesz a ξ valószínűségi változó saját magával vett kovarianciája, korrelációs együtthatója?

2. Az X1, X2, valószínűségi változókról tudjuk, hogy a korrelációs együtthatójuk 0,5. Mennyi lesz a 2X1 és 3X2 valószínűségi változók korrelációs együtthatója?

3. Ha minden nő nála 5 évvel idősebb férfihoz menne feleségül, akkor mennyi lenne a férjek és a feleségek életkora közötti korreláció értéke?

4. Mi lesz a ξ és η valószínűségi változók korrelációs együtthatója, ha $\eta = a\xi + b$?