

## 8. Feladatsor

## Többdimenziós eloszlások

## I. Diszkrét eloszlások

1. A  $(\xi, \eta)$  valószínűségi vektorváltozó együttes valószínűség-eloszlását a tartalmazza a következő táblázat:

$\xi \backslash \eta$	-1	0	1
1	1/6	1/4	1/6
2	1/12	1/12	1/4

- a.) Adja meg az együttes eloszlásfüggvényt!  
 b.) Adja meg a két változó kovarianciáját!
2. Két kockával dobunk. Jelentse  $X$  az egyik,  $Y$  a másikon dobott számot. Írjuk fel a  $(X, Y)$  kétdimenziós valószínűségi változó eloszlását és eloszlásfüggvényét!
3. A sík következő koordinátájú pontjaiból kaphatunk rádióüzeneteket, a megadott valószínűségekkel. Készítsen rajzot hozzá!

$X \backslash Y$	0	0.5	4
-1	1/12	1/12	1/6
2	1/6	1/6	1/3

- a.) Adjuk meg az  $X$  és  $Y$  koordináták eloszlását!  
 b.) Függetlenek-e a koordináták?
4. Egy dobozban 30 darab 40 wattos, 30 darab 60 wattos és 40 darab 100 wattos villanykörte van. Kiveszünk véletlenszerűen, visszatérés nélkül 20 villanykörtét. Jelentse  $\xi$  a mintában szereplő 40 wattos égők számát,  $\eta$  pedig a 60 wattos égők számát!  
 a.) Írjuk fel a  $(\xi, \eta)$  kétdimenziós valószínűségi változó valószínűség-eloszlását!  
 b.) Számítsuk ki  $\xi$  peremeloszlását!
5. A  $(\xi, \eta)$  lehetséges értékeit és együttes valószínűség-eloszlását az alábbi táblázat tartalmazza.  
 a.) Adja meg a  $p$  paraméter értékét!  
 b.) Számítsuk ki a következő valószínűségeket:  
 $P(\xi = i, \eta = 0)$  ahol  $(i = 0, 1, 2)$ ;  $P(\xi < 2 \mid \eta = 0)$ ;  $P(\xi \geq 1 \mid \eta = 1)$ ;  $P(\eta = 1 \mid \xi \geq 1)$ !

$\xi \backslash \eta$	0	1
0	$p$	$p$
1	$p$	$3p$
2	$2p$	$4p$

- c.) Írja fel  $M(\eta \mid \xi)$  eloszlását!
6. Egy piros és egy kék kockával dobunk. Legyen  $X$  a piros kockán dobott szám,  $Y$  pedig a két szám összege! Számítsuk ki  $Y$ -nak az  $X = 3$  eseményre vonatkoztatott feltételes várható értékét!
7.  $\xi$  és  $\eta$  együttes valószínűség-eloszlását a következő táblázat tartalmazza. Írja fel  $M(\eta \mid \xi)$  eloszlását!

$\eta \backslash \xi$	<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>
<b>1</b>	1/12	0	2/12
<b>2</b>	2/12	1/12	3/12
<b>3</b>	0	2/12	1/12

8. Az  $(\xi, \eta)$  valószínűségi vektorváltozó együttes valószínűség-eloszlását tartalmazza az alábbi táblázat.

$\xi \backslash \eta$	<b>1</b>	<b>0</b>	<b>2</b>
<b>-1</b>	p	q	p
<b>1</b>	q	p	q

- a.) Határozza meg p és q paraméterek értékét, ha tudjuk, hogy a valószínűségi változók korrelálatlanok!  
 b.) Függetlenek-e a változók?

9. Két valószínűségi változó együttes valószínűség-eloszlását tartalmazza az alábbi táblázat:

<b>X \ Y</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	<b>2</b>
<b>0</b>	1/4	0	1/4
<b>1</b>	0	1/2	0

- a.) Adja meg az együttes eloszlásfüggvényt, és a perem eloszlásokat!  
 b.) Független-e a két változó? Hanem, akkor adja meg a korrelációs együttható értékét!

10. Az  $(X, Y)$  kétdimenziós valószínűségi változó lehetséges értékeit a  $(0,0)$ ;  $(0,4)$ ;  $(4,0)$ ;  $(4,4)$  pontok által meghatározott négyzet belsejében levő egész koordinátájú pontok alkotják. Az  $(X, Y)$  bármelyik értékét egyenlő valószínűséggel veszi fel a négyzet középpontja kivételével, amely négyszer akkora valószínűséggel következik be, mint a többi. Számítsuk ki X és Y korrelációs együtthatóját, és állapítsa meg, független-e ez a két valószínűségi változó.

11. Két valószínűségi változó együttes valószínűség-eloszlását tartalmazza az alábbi táblázat.

- a.) Milyen értékeket vehet fel  $\varepsilon$  ?  
 b.) Írja fel az együttes eloszlásfüggvényt, ha  $\varepsilon=1/8$  .  
 c.) Függetlenek-e a változók?

$\xi \backslash \eta$	0	1
-1	$\frac{1}{4}-\varepsilon$	$\frac{1}{4}+\varepsilon$
0	$\frac{1}{4}+\varepsilon$	$\frac{1}{4}-\varepsilon$

## II. Folytonos eloszlások

- Határozzuk meg, hogy az  $A$  paraméter milyen értéke mellett lehet az  $f(x, y) = x^2 + Ay^2$  függvény a  $(0 < x < 1, 0 < y < 2)$  tartományban egy kétdimenziós valószínűségi változó sűrűségfüggvénye.
  - Írjuk fel a perem sűrűségfüggvényeket!
  - Határozza meg az  $M(X|Y = y)$  feltételes várható értéket!

- Legyen a  $\xi$  és  $\eta$  valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye:

$$f_{\xi, \eta}(x, y) = \begin{cases} \frac{6}{7}(x^2 + \frac{xy}{2}), & \text{ha } 0 < x < 1 \text{ és } 0 < y < 2 \\ 0 & \text{különbén} \end{cases}$$

- Mutassuk meg, hogy ez valóban sűrűségfüggvény!
  - Írjuk fel együttes eloszlásfüggvényüket és perem-eloszlásfüggvényeket!
  - Adjuk meg a  $P(\xi > 0.5, \eta < 1)$  valószínűséget!
  - Függetlenek-e a valószínűségi változók?
- A  $\xi$  valószínűségi változó jelentse egy kémiai anyag felületi feszültségét,  $\eta$  a savasságát. A skálázást úgy végezzük, hogy  $\xi$  0 és 2 között,  $\eta$  2 és 4 között vesz fel értékeket. A valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye:

$$f(x, y) = \begin{cases} \lambda(6 - x - y) & \text{ha } 0 \leq x \leq 2 \text{ és } 2 \leq y \leq 4 \\ 0 & \text{különbén} \end{cases}$$

- Határozza meg a  $\lambda$  paraméter értékét.
  - Adja meg a feltételes sűrűségfüggvényt.
  - Függetlenek-e a valószínűségi változók?
- Adja meg az  $X$  valószínűségi változó perem eloszlásfüggvényét, ha az  $X$  és  $Y$  valószínűségi változók együttes sűrűségfüggvénye adott:  $f(x, y) = \frac{y^3 + y}{6} e^{1-x}$  ha  $1 < x$  és  $0 < y < 2$  különben 0!
  - Adott két független, örökifjú tulajdonságú valószínűségi változó. Az egyik várható értéke 2, a másiké 4. Írja fel az együttes sűrűségfüggvényüket!

## III. Vegyes feladatok

- Mi lesz a  $\xi$  valószínűségi változó saját magával vett kovarianciája, korrelációs együtthatója?
- Az  $X_1, X_2$ , valószínűségi változókról tudjuk, hogy a korrelációs együtthatójuk 0,5. Mennyi lesz a  $2X_1$  és  $3X_2$  valószínűségi változók korrelációs együtthatója?
- Ha minden nő nála 5 évvel idősebb férfihoz menne feleségül, akkor mennyi lenne a férjek és a feleségek életkora közötti korreláció értéke?
- Mi lesz a  $\xi$  és  $\eta$  valószínűségi változók korrelációs együtthatója, ha  $\eta = a\xi + b$ ?