Matematika A2a 1. gyakorlat – számolás mátrixokkal

Lelkes Ádám

2010. 02. 09.

1. feladat

Gondoljuk végig a következőket:
AB és BA létezik $\Longleftrightarrow$ A $m \times n$-es, B $n \times m$-es
$AB = BA \implies A$ és B $n \times n$-es
$A(BA)$ létezik, A $m \times n$-es $\implies B$ $n \times m$-es

2. feladat

Legyenek adva a következő mátrixok:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Végezzük el az alábbi mátrixműveleteket, ha lehet:

$$A + A,\ A + B,\ AB,\ AC,\ AC + 2C,\ AD - 3D,\ D^2,\ CC^T,\ BC,\ CB.$$

3. feladat

Mutassuk olyan négyzetes A mátrixot, amire $A^2 = I$, de $A \neq \pm I$.

4. feladat

Mely $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ oldja meg a következőket?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} B = 0,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} B = 0$$

5. feladat

Bizonyítsuk be:

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} a^n & a^{n-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \cos n\alpha & -\sin n\alpha \\ \sin n\alpha & \cos n\alpha \end{pmatrix}$$

6. feladat

Mik $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ hatványai?

Megjegyzés: Az olyan mátrixokat, amelyeknek valamelyik hatványa a 0 mátrix, *nilpotens* mátrixoknak nevezzük. Végiggondolható, hogy általában ha egy mátrix főátlójában és a főátló alatt csupa 0 szerepel, akkor a mátrix nilpotens. Van azonban olyan nilpotens mátrix is, ami egyáltalán nem tartalmaz 0-t, pl. $\begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 4 & -6 \end{pmatrix}$.

7. feladat

Az alábbi azonosságok igazak-e mátrixokra?
a) $(AB)^2 = A^2B^2$
b) $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
c) $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$
d) $(A+I)(A-I) = A^2 - I$
Példa: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

8. feladat

Igaz-e, hogy $AB = AC$, $A \neq 0 \implies B = C$?

9. feladat

Legyen $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$.
Keressük meg azt az x oszlopvektort, amire Ax
a) A 2. oszlopának kétszerese
b) A 2. és 1. oszlopának különbsége
Keressük meg azt az y sorvektort, amire yA
c) A 3. sora
d) A 2. és 1. sorának különbsége
e) A 1. sorának és a másik két sor összegének a különbsége
Keressük meg azt az X mátrixot, amire AX úgy áll elő, hogy
f) A 2. oszlopát szorozzuk 4-gyel
g) felcseréljük A oszlopait
h) az 1. oszlophoz hozzáadjuk a 2. ötszörösét
Keressük meg azt az Y mátrixot, amire YA úgy áll elő, hogy
i) A első két sora felcserélődik
j) A 3. sorát megszorozzuk (-1)-gyel
k) A 3. sorához hozzáadjuk az 1. sort és a 2. sor kétszeresét