Matematika A2a 2. gyakorlat – vektorterek, lineáris függetlenség

Lelkes Ádám

2010. 02. 16.

1. feladat

Határozzuk meg a következő mátrix inverzét:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

2. feladat

Melyek alkotnak vektorteret $\mathbb{R}$ fölött az alábbiak közül? A köztük szereplő vektorterek hány dimenziósak? Adjunk meg bennük – ha lehet – bázist!
a) a komplex számok $\mathbb{C}$ halmaza az összeadásra és a valóssal való szorzásra nézve;
b) 3×3-as valós felső háromszögmátrixok a szokásos műveletekkel;
c) invertálható 2×2-es valós mátrixok;
d) legfeljebb 5-ödfokú valós polinomok;
e) a (tetszőleges fokú) valós polinomok;
f) a folytonos valós függvények.

Megoldás

c) kivételével mindegyik vektortér, a vektortér definíciója alapján ellenőrizhető. Az invertálható mátrixok azért nem alkothatnak vektorteret, mert két invertálható mátrix összege már nem feltétlenül invertálható.

3. feladat

Létezik-e egyelemű vektortér? Általában véges elemszámú? Van-e vektortér két altérrel? Hát két valódi altérrel? Mik a véges sok altérrel rendelkező vektorterek?

Megoldás

Egyelemű létezik, az egyetlen 0 vektorból álló vektortér, a műveletek természetesen: $0 + 0 = 0$, $\lambda \cdot 0 = 0$. $\{0\}$ tetszőleges test felett vektortér ezzel a definícióval. Üres vektortér nem létezik, mivel minden vektortér tartalmazza legalább a nullvektort.
Ebben a kurzusban csak $\mathbb{R}$, ill. $\mathbb{C}$ feletti vektorterekkel fogunk foglalkozni. Vannak véges testek is, a véges testek fölötti véges dimenziós vektorterek értelemszerűen véges elemszámúak.
Tekintsük azonban egy legalább egydimenziós $\mathbb{R}$ feletti V vektorteret. Legyen $v \in V$. Ekkor $\{\lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\}$ már eleve végtelen halmaz, és részhalmaza (ráadásul altere) a vektortérnek.
Egydimenziós vektortérnek két altere van: az egyik a $\{0\}$, a másik a teljes vektortér. A kettő „között” nincs altér, ugyanis ha $\{0\} \neq U \subseteq V$ altér, akkor $\exists v \in U : v \neq 0$, és ekkor a vektortér definíciója szerint $\{\lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\} \subseteq U$, de ez már eleve egydimenziós vektortér, következésképpen $U = V$.

Legalább kétdimenziós $\mathbb{R}$ (vagy $\mathbb{C}$) feletti vektortérnek viszont már van végtelen sok egydimenziós valódi altere: ha $\{u, v\}$ lineárisan független rendszer a vektortérben, akkor $\{\lambda\alpha u + \lambda v : \lambda \in \mathbb{R}\}$ minden $\alpha \in \mathbb{R}$-re különböző egydimenziós altér.

4. feladat

Melyek alkotnak az alábbiak közül alteret az összes $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények terében?
a) $\{f : f(0) = 1\}$;
b) $\{f : f(1) = 0\}$;
c) $\{f : f$ kétszer differenciálható, $f''(x) + xf(x) = 0\}$;
d) $\{f : f \geq 0\}$;
e) $\{f : \int\limits_{-\infty}^{\infty} |f|$ konvergens $\}$.

Megoldás

Azt kell ellenőrizni, hogy a felsorolt halmazok zártak-e az összeadásra és a skalárral (valós számmal) való szorzásra. Pl. a) nem altér, ugyanis ha $f(0) = 1$ és $g(0) = 1$, akkor $(f + g)(0) = f(0) + g(0) = 1 + 1 = 2 \neq 1$, tehát itt két vektor összege már nem része a megadott halmaznak. b) viszont altér, ugyanis ha $f(0) = 0$ és $g(0) = 0$, akkor $(f + g)(0) = f(0) + g(0) = 0 + 0 = 0$, és $(\lambda f)(0) = \lambda f(0) = \lambda \cdot 0 = 0$. Hasonlóan ellenőrizhető, hogy c) és e) altér, de d) nem, ugyanis a negatív valós számmal való szorzás kivezet a részhalmazból.

5. feladat

Melyek alkotnak az alábbiak közül alteret az $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozatok terében?
a) $\{(a_n) : a_1 = 2a_3 + 3a_5\}$;
b) $\{(a_n) : a_2 = a_4a_5\}$;
c) $\{(a_n) : \lim_{n\to\infty} a_n = 1\}$
d) számtani sorozatok;
e) mértani sorozatok.

6. feladat

Ha u és v lineárisan függetlenek, akkor $\alpha u + \beta v$ és $\gamma u + \delta v$ milyen együtthatókkal lesz összefüggő?

Megoldás

Kettő darab vektor pontosan akkor összefüggő, ha skalárszorosai egymásnak. (Kettőnél több vektorra ez nem igaz!) Mivel u és v lineárisan függetlenek, ezért $\alpha u + \beta v$ csak akkor lehet $\gamma u + \delta v$ skalárszorosa, ha $\alpha\gamma = \beta\delta$.

7. feladat

Igaz-e, hogy ha a $v_1, v_2, \ldots, v_{10}$ vektorok közül bármely 9 lineárisan független, akkor mind a 10 is lineárisan független? Adjunk bizonyítást vagy ellenpéldát!

Megoldás

Nem igaz. Legyen $v_1, \ldots, v_9$ bázis egy 9 dimenziós vektortérben, $v_{10} = v_1 + \ldots + v_9$. Könnyen végiggondolható, hogy a 10 vektor közül bármelyik 9-et kiválasztva lineárisan független rendszert kapunk, azonban v_{10} már előáll a többi 9 vektor lineáris kombinációjaként.

8. feladat

Bizonyítsuk be, hogy ha $\{a, b, c, d\}$ lineárisan független, de $\{a, b, c, e\}$ és $\{c, d, e\}$ lineárisan összefüggő, akkor $e \neq 0$ esetén $\{a, b, d, e\}$ lineárisan független.

9. feladat

Oldjuk meg sortranszformációkkal:
a) Hány független van a következő vektorok között?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b) Felírható-e az $x^3 + 7x^2 + 5$ polinom az $x^3 + 2$, $3x^2 + 4x$, $5x^2 + 6x$ polinomok lineáris kombinációjaként?
c) Az $\{a + b\cos x + c\cos^2 x : a, b, c \in \mathbb{R}\}$ térben bázist alkot-e $\{1 + \cos x, \cos x + \cos^2 x, \cos 2x\}$?

Extra feladat jutalomért

A szultán gondolt $\mathbb{R}^{1001}$-ben egy bázist, amit Seherezádénak 1001 éjszaka alatt ki kell találnia, különben kivégzik. Éjszakánként egy általa választott vektorról megkérdezheti, mik a koordinátái.
Életben marad-e Seherezádé?