Matematika A2a 3. gyakorlat – mátrix rangja, lineáris egyenletrendszerek, determinánsok

Lelkes Ádám

2010. 02. 23.

1. feladat

a) Számítsuk ki a következő mátrix rangját:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Számítsuk ki a következő mátrix rangját t függvényében:

$$\begin{pmatrix} t & 3 & -1 \\ 3 & 6 & -2 \\ -1 & -3 & t \end{pmatrix}$$

2. feladat

Gondoljuk végig a következőket:
a) Ha egy mátrix sorai és oszlopai is lineárisan független rendszert alkotnak, akkor a mátrix négyzetes.
b) Az A mátrix rangja pontosan akkor 1, ha

$$A = \begin{pmatrix} u_1 \\ . \\ . \\ . \\ u_m \end{pmatrix} (v_1 \dots v_n)$$

3. feladat

Melyik állítás igaz?
a) Ha az $Ax = b$ lineáris egyenletrendszernek van megoldása, akkor $[A|b]$ oszlopai lineárisan összefüggők.
b) Ha $[A|b]$ oszlopai összefüggők, akkor az egyenletrendszernek van megoldása.
c) Ha A oszlopai függetlenek, akor van megoldás.
d) Ha A sorai függetlenek, akkor van megoldás.
e) Ha egyértelműen létezik megoldás, akkor A oszlopai függetlenek.
f) Ha egyértelműen létezik megoldás, akkor A sorai függetlenek.

4. feladat

Számítsuk ki a következő determinánsok értékét:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 5 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \end{vmatrix}$$

5. feladat

Egy mátrix *nilpotens*, ha van olyan n pozitív egész, hogy $A^n = 0$. Bizonyítsuk be, hogy a nilpotens mátrixok nem invertálhatók.

6. feladat

Bizonyítsuk be, hogy egy felsőháromszögmátrix determinánsa a főátlóbeli elemek szorzata.

7. feladat

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Adjuk meg A^{-1}, A^{80}, $3A$, $A + I$, illetve A^T determinánsát.