Matematika A2a 4. gyakorlat – lineáris leképezések

Lelkes Ádám

2010. 02. 23.

Emlékeztető

Legyen V, W két vektortér. Ekkor egy $\varphi : V \to W$ függvény *lineáris leképezés*, ha $\varphi(\lambda v_1 + \mu v_2) = \lambda\varphi(v_1) + \mu\varphi(v_2)$. Mivel az összeadás és a skalárral való szorzás definiálják a vektortér struktúráját, a lineáris leképezések pontosan azok, amik a vektortér struktúráját, azaz a vektortereken definiált műveleteket tartják (ezt úgy mondjuk, hogy a lineáris leképezések a *vektortérhomomorfizmusok*).
Lineáris leképezések kompozíciója szintén lineáris leképezés.
Ha egy lineáris leképezést megadunk egy bázis elemein, akkor ez alapján egyértelműen kiterjeszthető az egész vektortérre (ezt pedig úgy mondjuk, hogy a bázis a vektorteret *szabadon generálja*).
Így ha kiválasztunk V-ben és W-ben is egy-egy bázist, akkor a lineáris leképezés reprezentálható egy mátrixszal olyan módon, hogy a mátrix oszlopai rendre V báziselemei képének koordinátái W bázisában. Ha a vektorokat is koordinátázzuk a bázis szerint, a lineáris leképezés hatását a vektoron úgy kapjuk meg, hogy balról megszorozzuk a vektort a mátrixszal. Két lineáris leképezés kompozíciójának mátrixa pedig a leképezések mátrixának szorzata (az először ható leképezést írva jobbra).
Mint ahogy a mátrixszorzás, így ennek megfelelően a leképezések kompozíciója sem kommutatív!

1. feladat

Mely leképezések lineárisak az alábbiak közül? A lineárisaknak adjuk meg a mátrixát a standard bázisban, valamint adjuk meg a magterüket és képterüket is.
a) az $\mathbb{R}^2$ sík tükrözése az $x = 2$ egyenesre;
b) $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto (x + y, x + y)$;
c) az a leképezés, ami minden $\mathbb{R}^2$-beli vektorhoz a hosszát rendeli;
d) a komplex konjugálás $\mathbb{C}$-n mint $\mathbb{R}$ feletti vektortéren;
e) egy adott $a + bi$ komplex számmal szorzás $\mathbb{C}$-n mint $\mathbb{R}$ feletti vektortéren;
f) a sík α szögű elforgatása az origó körül;
g) a deriválás a legfeljebb 3-adfokú valós polinomok terén.

2. feladat

Legyen V vekortér a $\mathbb{K}$ test felett. Gondoljuk végig, hogy a $\varphi : V \to \mathbb{K}$ lineáris leképezések vektorteret alkotnak a következő (természetes) műveletekkel: $(\lambda\varphi)(x) = \lambda \cdot \varphi(x)$, $(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x)$. Ez a vektortér V úgynevezett *duális tere.*

3. feladat

Milyen V vektortereken van olyan $\varphi : V \to V$ lineáris leképezés, hogy $\mathrm{Ker}\varphi = \mathrm{Im}\varphi$?

4. feladat

Bizonyítsuk be, hogy ha V véges dimenziós vektortér, és $A : V \to V$ lineáris leképezés, akkor A pontosan akkor invertálható, ha $\mathrm{Ker}A = \{0\}$, ami továbbá ekvivalens azzal, hogy $\mathrm{Im}A = V$.

5. feladat

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},\ T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ Tv_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},\ Tv_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix}.\ T\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = ?$$

6. feladat

Legyen $T : V \to V$ lineáris leképezés, V-ben $\{e_1, e_2, e_3\}$ bázis. $Te_1 = e_1 + 2e_2 + 5e_3$, $Te_2 = 2e_1 + e_2 + 4e_3$, $Te_3 = -e_1 + 3e_2 + 5e_3$. Adjunk meg Ker$T$-ben és Im$T$-ben egy-egy bázist.

7. feladat

Legyen $T : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}^3$, $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ -x1 \\ 0 \end{pmatrix}$ lineáris leképezés. $\mathbb{R}^2$-ben $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$, $\mathbb{R}^3$-ben $\mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ bázis. Írjuk fel ezekben a bázisokban T mátrixát.

8. feladat

Legyen T a legfeljebb másodfokú valós polinomok teréből ugyanebbe a térben képező lineáris leképezés. A vektortérnek egy bázisa $\mathcal{B} = \{3x + 3x^2, -1 + 3x + 2x^2, 3 + 7x + 2x^2\}$. Ebben a bázisban T mátrixa $T_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 6 & -2 & 4 \end{pmatrix}$. Számoljuk ki $T(1 + x^2)$-et.