Matematika A2a 5. gyakorlat – sajátérték, sajátvektor, belső szorzat

Lelkes Ádám

2010. 03. 09.

Emlékeztető

Ha V vektortér a $\mathbb{K}$ test felett, $A : V \to V$ lineáris leképezés, és egy $v \neq 0$ vektorra és $\lambda \in \mathbb{K}$ skalárra teljesül, hogy $Av = \lambda v$, akkor azt mondjuk, hogy λ *sajátértéke* A-nak, és v a hozzá tartozó *sajátvektor*. Szemléletesen ez azt jelenti, hogy A a v vektor irányát megtartja, csak λ-szorosára nyújtja.
Például $\mathbb{R}^2$-en az x tengelyre való tükrözésnek sajátvektorai az $(x, 0)$ alakú vektorok, a hozzájuk tartozó sajátérték az 1. A többi vektor irányát a leképezés megváltoztatja. A 45 fokkal való forgatásnak viszont nincs sajátvektora a síkon, hiszen minden vektor iránya megváltozik.
Látható, hogy ha u és v azonos sajátértékhez tartozó sajátvektorok, vagyis $Au = \lambda u, Av = \lambda v$, akkor u és v minden lineáris kombinációja is sajátvektor. Tehát egy sajátértékhez sosem csak egy sajátvektor tartozik, hanem egy legalább egydimenziós *sajátaltér*, a sajátvektorokat ebből lényegében találomra választjuk, lényeg, hogy a sajátalteret megadjuk egy bázisával.
A sajátértékek a következő módon számolhatók ki: ha $Av = \lambda v$, az azt jelenti, hogy az $(A - \lambda I)v = 0$ homogén lineáris egyenletrendszernek van nem nulla megoldása (az egyenlet megoldásainak halmaza ugyebár $\mathrm{Ker}(A - \lambda I)$). Tehát $A - \lambda I$ magtere nem csak a 0 vektorból áll, ez pontosan azt jelenti, hogy $A - \lambda I$ nem invertálható, vagyis a determinánsa 0. Ha felírjuk a $\det(A - \lambda I) = 0$ egyenletet, és ezt kifejtjük, akkor a bal oldalon λ egy polinomját kapjuk, ezt nevezzük *karakterisztikus polinomnak*. Ezen karakterisztikus polinom gyökei a sajátértékek. A λ sajátértékhez tartozó sajátvektor meghatározásához ezek után már csak az $(A - \lambda I)v = 0$ lineáris egyenletrendszert kell megoldani.

1. feladat

Mik egy alsó vagy felső háromszögmátrix sajátértékei?

2. feladat

Bizonyítsuk be, hogy egy négyzetes mátrix pontosan akkor invertálható, ha a 0 nem sajátértéke.

3. feladat

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Számítsuk ki A^{25} sajátértékeit és sajátvektorait.

4. feladat

Gondoljuk végig, hogy egy 2×2 típusú A mátrix karakterisztikus polinomja $\lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda + \det(A)$.

5. feladat

Adjunk példát olyan $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ lineáris leképezésre, melynek nincs sajátértéke. Bizonyítsuk be, hogy minden $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lineáris leképezésnek van sajátértéke.

6. feladat

Melyik állítás igaz az alábbiak közül?
a) Ha $A + B = I$, akkor A és B sajátvektorai ugyanazok.
b) $A^2 = 0$ pontosan akkor, ha A-nak csak 0 a sajátértéke.
e) Ha a 0 sajátértéke A^2-nek, akkor A-nak is.
d) λ^2 pontosa akkor sajátértéke A^2-nek, ha λ vagy $-\lambda$ sajátértéke A-nak.

7. feladat

Egy $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ transzformáció mátrixa a standard bázisban $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Keressünk olyan bázist, melyben a mátrixa $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ lesz.

8. feladat

Írjuk fel a $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ mátrixot $S \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} S^{-1}$ alakban (diagonalizáció), és ennek segítségével számoljuk ki a $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{80}$ mátrixot.

9. feladat

Melyik skaláris szorzás az alábbiak közül?
a) $C^1([0,1],\mathbb{R})$-en $\int\limits_0^1 fg$, $\int\limits_0^1 f'g'$, $\int\limits_0^1 f'g' + f(0)g(0)$;
b) $\mathbb{R}^2$-en $< x, y >:= x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 6x_2y_2$;
c) $\mathbb{R}^3$-ön $< x, y >:= x_1y_1 + x_3y_3$, ill. $xy := x_1^2y_1^2 + x_2^2y_2^2 + x_3^2y_3^2$.

10. feladat

Adjuk meg x és x^2, ill. sin és cos hajlásszögét az $< f, g >= \int\limits_0^1 fg$ skaláris szorzat mellett.