Matematika A2a 7. gyakorlat – konvergenciakritériumok numerikus sorokra

Lelkes Ádám

2010. 03. 23.

1. feladat

Számoljuk ki az alábbi sorok részletösszegeit:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n(n+1)}$$

2. feladat

Számoljuk ki a következő sorösszegeket:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5}{2^n} - \frac{1}{3^{n+2}}\right) = ?, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{(-1)^n}{5^n}\right) = ?$$

3. feladat

Számoljuk ki a következő sorösszegeket:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\arctan n - \arctan(n+1)) = ?, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(4n-3)(4n+1)} = ?, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = ?, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = ?$$

4. feladat

Konvergensek-e az alábbi sorok?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e}{\pi}\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-2}{n}\right)^n$$

5. feladat

Ellenőrizzük az alábbi sorok konvergenciáját:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+1)}{n+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-n}{n \cdot 2^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \tan\frac{1}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+2+\ldots+n}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 - 8n^2 + 1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tanh n}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh n}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)$$

6. feladat

Ellenőrizzük az alábbi sorok konvergenciáját:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^10}{2^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{(n^n)^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^n}{n^{n^2}}$$

7. feladat

Ellenőrizzük az alábbi sorok konvergenciáját:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\binom{2n}{n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)!}{5^{3n} \cdot n!(n+1)!(n+2)!}$$

8. feladat

Milyen c-re lesz konvergens a következő sor?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{c}{n}\right)^n n!$$

9. feladat

Ellenőrizzük az alábbi sorok konvergenciáját:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh n}{1+\cosh^2 n}$$

10. feladat

Bizonyítsuk be, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n^\alpha}}$ konvergens, ha $\alpha > 0$.

11. feladat

Mely sorok abszolút konvergensek az alábbiak közül:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{2n+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}}$$

Útmutatás

5. feladat: majoráns-, ill. minoránskritérium. Ha $|a_n| \leq |b_n|$, és $\sum b_n$ konvergens, akkor $\sum a_n$ is konvergens. Ha $|a_n| \geq |b_n|$, és $\sum b_n$ divergens, akkor $\sum a_n$ divergens.
6. feladat: gyökkritérium. Ha $\limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, akkor $\sum a_n$ konvergens. Ha a $\limsup$ 1-nél nagyobb, a sor divergens, 1 esetén a kritérium nem alkalmazható.
7. feladat: hányadoskritérium. Ha $\limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1$, akkor $\sum a_n$ konvergens. Ha a $\limsup$ 1-nél nagyobb, a sor divergens, 1 esetén a kritérium nem alkalmazható.
9. feladat: integrálkritérium. Ha $a_n = f(n)$, $f(n)$ folytonos függvény, és $\int_1^\infty f(x)\mathrm{d}x$ konvergens, akkor $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergens, és a megfordítás is igaz.
11. feladat: Leibniz-kritérium. Ha a_n váltakozó előjelű, és $|a_n|$ monoton csökkenve tart 0-hoz, akkor $\sum a_n$ abszolút konvergens.