Matematika A2a 8. gyakorlat – numerikus sorok feltételes és abszolút konvergenciája, függvénysorozatok határértéke

Lelkes Ádám

2010. 03. 30.

1. feladat

Bizonyítsuk be, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}$ feltételesen konvergens $0 < \alpha \leq 1$-re, abszolút konvergens $\alpha > 1$-re.

2. feladat

Az alábbi sorok közül melyik nem konvergens, melyik feltételesen, ill. abszolút konvergens?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-0,1)^n}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{1}{n}}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\arctan n}{n^2+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n}}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}), \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}), \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n - \ln n}$$

3. feladat

Adjunk példát olyan sorokra, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ill. $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergens, de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ divergens. Mi a helyzet, ha csak pozitív tagú sorokat tekintünk?

4. feladat

Becsüljük meg az S_4 részletösszeg hibáját a következő sorok esetében:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$$

5. feladat

Melyik részletösszeg közelíti a következő sorösszegeket $< 10^{-2}$ hibával? (Nem kell a legkisebbet megadni.)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\sqrt{n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-\sqrt{n}}$$

6. feladat

Mi az alábbi függvénysorozatok konvergenciatartománya, illetve határértéke?

$$(\ln x)^n, \quad n \sin \frac{x}{n}, \quad \frac{x^n}{1+x^{2n}}, \quad n(x^{\frac{1}{n}} - 1), \text{ ahol } x > 0$$

7. feladat

Mi a konvergenciatartománya az alábbi függvénysoroknak? Ha lehet, számoljuk ki a határfüggvényt is!

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)^{2n}}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln x}{(x+n)(x+n+1)}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^4+x^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+x^{2n}},$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^x}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}(1-x)(1-x^{\frac{1}{2}})\dots(1-x^{\frac{1}{n}}), \text{ ha } x>0, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{2x}{x^2+n^2}$$