Matematika A2a 9. gyakorlat – Taylor- és Fourier-sorok

Lelkes Ádám

2010. 04 06.

1. feladat

Számítsuk ki $\arctan x$ Taylor-sorát.

Megoldás

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1-(-x^2)} \sum_{n=0}^{\infty} (-x2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

$$\arctan x = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \int (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

2. feladat

Számítsuk ki $\ln\sqrt{1+x^2}$ Taylor-sorát.

Megoldás

$$(\ln\sqrt{1+x^2})' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot 2x = \frac{x}{1+x^2} = x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$$

$$\ln\sqrt{1+x^2} = \int x \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \int (-1)^n x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+2}}{2n+2}$$

3. feladat

Számítsuk ki $\sqrt[3]{29}$-et 10^{-3} pontossággal.

Megoldás

$$\sqrt[3]{29} = 3\left(1+\frac{2}{27}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n+1)}{n!}x^n + R_n(x) = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} x^n + R_n(x)$$

$$R_n(x) = \frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(m-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\xi)^{m-n-1}, \quad \xi \in]0,x[$$

$$x = \frac{2}{27}, \quad m = \frac{1}{3}$$

$$\sqrt[3]{29} = 3\left(1 + \frac{2}{81} - \frac{4}{81^2} + \ldots + R_n(x)\right)$$

$$3|R_2(x)| < \frac{3\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 5}{81^3} < 0,003 < 10^{-3}$$

$$\sqrt[3]{29} \approx 3\left(1+\frac{2}{81}-\frac{4}{81^2}\right) \approx 3,072$$

4. feladat

Legyen $A \in]0,\pi[$, $f(x)=1$, ha $|x|\leq A$, $f(x)=0$, ha $A<|x|\leq\pi$. Ezt a $[-\pi,\pi]$-n értelmezett függvényt terjesszük ki 2π periodikusan a számegyenesre. Számítsuk ki ezen függvény Fourier-sorát.
*Megoldás A függvény páros, így a szinuszos tagok (b_k) mind 0-k.

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{A} 1\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}A$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} f(x)\cos kx\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{A}\cos kx\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left[\frac{\sin kx}{k}\right]_0^A = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\sin kA}{k}$$

$$f(x) \approx \frac{2}{\pi}A + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kA}{k}\cos kx$$

5. feladat

Számítsuk ki $|\sin x|$ Fourier-sorát.

Útmutatás

Azt kell észrevenni, hogy $\sin x\cos kx = \sin(1+k)x + \sin(1-k)x$, ezután az integrálok könnyen számolhatók.