Segédanyag a lineáris algebra fogalmainak megértéséhez

Lelkes Ádám

2011. február 17.

1. A vektortér definíciója

Legyen V egy halmaz, $\mathbb{K}$ egy test (mi csak a $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, ill. a $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ esettel fogunk foglalkozni). Legyen V-n értelmezve egy $+$-szal jelölt kétváltozós művelet, és minden $\lambda \in \mathbb{K}$ esetén legyen értelmezve V elemein a λ-val való szorzás. Akkor mondjuk, hogy V *vektortér* $\mathbb{K}$ felett, ha

1. Minden $u, v, w \in V$-re $(u+v)+w = u+(v+w)$ (asszociativitás), $u+v = v+u$ (kommutativitás), létezik $0 \in V : 0+v = v+0 = v$ (nullelem létezése), létezik $-v \in V : v+(-v) = (-v)+v = 0$ (additív inverz, magyarul ellentett létezése). Ezeket a feltételeket röviden úgy mondhatjuk, hogy $(V;+)$ Abel-csoport.

2. Minden $u, v \in V$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ esetén $\lambda v = v\lambda$, $(\lambda\mu)v = \lambda(\mu v)$, $(\lambda+\mu)v = \lambda v + \mu v$, $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$, továbbá $0 \cdot v = 0$, $1 \cdot v = v$, ahol a bal oldalon szereplő 0, ill. 1 a $\mathbb{K}$ test nullelemét, ill. egységelemét jelöli.

V elemeit vektoroknak, $\mathbb{K}$ elemeit skalároknak nevezzük.

2. A vektortér fogalmának szemléletes jelentése

A vektortér a szokásos sík-, ill. térvektorok fogalmának általánosítása. Könnyen ellenőrizhető, hogy pl. a síkvektorok a vektorok középiskolából ismert összeadásával és valós számmal való szorzásával (nyújtás) valóban vektorteret alkotnak.

Sőt, valójában minden két-, ill. háromdimenziós valós vektortér mint vektortér lényegében ugyanaz, mint a sík-, ill. térvektorok tere, tehát lényegében egy olyan absztrakt struktúrát alkottunk, amely majd lehetővé teszi, hogy a sík-, ill. térvektorokkal kényelmes és egyben matematikailag precíz módon tudjunk számolni, és ezt általánosíthassuk többdimenziós terekre is.

3. Altér, generált altér

A továbbiakban V mindig vektorteret fog jelölni a $\mathbb{K}$ test felett. V olyan U részhalmazait nevezzük V *alterének*, melyek maguk is vektorteret alkotnak $\mathbb{K}$ felett úgy, hogy a műveletek értelemszerűen a V-beli műveletek megszorítása az U halmazra.

Amikor azt akarjuk eldönteni tehát, hogy egy $U \subseteq V$ részhalmaz altér-e, a műveleti azonosságokat nem kell ellenőrizni, csak azt, hogy U zárt-e a műveletekre, azaz U-beli vektorok összege, ill. skalárszorosa is U-beli-e.

Minden vektortérnek van legalább két altere, az egyetlen nullvektorból álló $\{0\}$ altér, ill. az egész V vektortér. Az ezektől különböző altereket nevezzük *valódi altérnek*.

Persze ha van egy $H \subseteq V$ részhalmaz, akkor van olyan altér, ami tartalmazza H-t, pl. V nyilván. Azt a *legszűkebb* alteret, ami tartalmazza H-t, nevezzük a H részhalmaz által *generált altérnek*.

4. Lineáris kombináció, lineáris függetlenség

Ha $v_1, \ldots, v_n$ V-beli vektorok egy rendszere, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (nem feltétlenül különböző) skalárok, akkor a $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$ alakú összegeket a $v_1, \ldots, v_n$ vektorok *lineáris kombinációinak* nevezzük.

Azt mondjuk, hogy $\{v_1, \dots, v_n\}$ *lineárisan független rendszer*, ha $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n \iff \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$, azaz ha csak úgy áll elő a 0 vektor a vektorok lineáris kombinációjaként, ha minden együttható 0.

Van egy másik, ezzel ekvivalens definíció is: $\{v_1, \dots, v_n\}$ akkor lineárisan független rendszer, ha egyik vektor sem áll elő a többi lineáris kombinációjaként, azaz nincs olyan $i \in \{1, \dots, n\}$, hogy $v_i = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_{i-1} v_{i-1} + \lambda_{i+1} v_{i+1} + \ldots + \lambda_n v_n$.

Ez a definíció mutatja, hogy miért lineáris függetlenség a fogalom neve: arról van szó, hogy egyik vektor sem „függ" a többitől, azaz egyiket sem lehet a többi segítségével előállítani.

5. Bázis, dimenzió

Generátorrendszernek nevezzük az olyan vektorrendszert, amire teljesül, hogy a benne szereplő vektorok lineáris kombinációjaként a vektortér összes eleme előáll, amelyek tehát *generálják*, máshogy mondva *kifeszítik* az egész vektorteret.

Ha egy generátorrendszer még lineárisan független rendszer is egyben, akkor *bázisnak* nevezzük. A bázis egyben minimális generátorrendszer (tehát a legkisebb vektorrendszer, amely már az egész teret kifeszíti), ill. maximális lineárisan független rendszer (azaz olyan lineárisan független rendszer, amihez már nem lehet több vektort hozzáadni úgy, hogy a lineáris függetlenség ne romoljon el).

Minden vektortérben van bázis, és egy vektortérben minden bázis elemszáma megegyezik. A vektortér bázisainak elemszámát nevezzük a vektortér *dimenziójának*.

Például a síkon egy vektor még csak egy origón átmenő egyenest feszít ki (az egy síkvektor által generált altér az adott vektor skalárszorosaiból álló egydimenziós vektortér), két lineárisan független vektor viszont már kifeszíti az egész síkot. Jellemzően a síkban két merőleges egységvektort szoktunk bázisnak választani. Azt már mindenki tudja középiskolából, hogy két merőleges egységvektor lineáris kombinációjaként a sík minden vektora előáll.

(Fontos megjegyezni, hogy általában vektortereken még nem definiáltuk a merőlegesség fogalmát, ehhez először szükség lesz skalárszorzás bevezetésére.)

Az is elmondható, hogy tetszőleges bázis esetén a minden vektor egyértelműen előáll a báziselemek lineáris kombinációjaként.

6. Koordinátázás, véges dimenziós vektorterek konstrukciója

Ha tehát adott egy $\{b_1, \dots, b_n\}$ bázis (ahol n így a vektortér dimenzióját jelöli), minden $v \in V$ vektor előáll egyértelműen $v = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \ldots + \lambda_n b_n$ alakban.

Ha $v = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $u = \mu_1 b_1 + \mu_2 b_2 + \ldots + \mu_n b_n$, akkor
$u + v = (\lambda_1 + \mu_1) b_1 + (\lambda_2 + \mu_2) b_2 + \ldots + (\lambda_n + \mu_n) b_n$,
$\alpha v = \alpha \lambda_1 b_1 + \alpha \lambda_2 b_2 + \ldots + \alpha \lambda_n b_n$.

Az u, v vektorok báziselemek lineáris kombinációjaként történő előállításában szereplő együtthatókat nevezzük a u, v *koordinátáinak*. Tehát a vektorokat koordinátánként lehet összeadni, ill. skalárral szorozni.

Vagyis tetszőleges n-dimenziós vektortér ilyen módon egy bázis kiválasztásával azonosítható a szám-n-esekkel, vagyis $V \cong \{(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) : \forall i \in \{1, \dots, n\} : \lambda_i \in \mathbb{K}\}$.

Tehát tetszőleges $\mathbb{K}$ test felett tetszőleges n természetes számra konstruálható n-dimenziós vektortér egyszerűen úgy, hogy a szám-n-esek halmazán az összeadást és a skalárral való szorzást is komponensenként végezzük.

Valójában ugyanezt tesszük, amikor a síkvektorokkal számolunk: nem az irányított szakaszokon végezzük az összeadást, hanem kiválasztunk egy bázist, praktikusan két merőleges egységvektort, és az összes többi vektort ezek lineáris kombinációjaként állítjuk elő, és onnantól kezdve az összeadást és a skalárral való szorzást a koordinátákon végezzük el.