Matematika EP1 1. gyakorlat – bevezető

Lelkes Ádám

2010. 09. 14.

A gyakorlat anyaga hivatalosan a gimnáziumból ismert alapvető függvénytani fogalmak átismétlése volt, ezt a feladatot nagyrészt el is végeztük.
A következő nem triviális feladatok szerepeltek:

1. feladat

Korlátos-e a következő függvény:

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

Megoldás

Számolgatással megsejthető, hogy korlátos, és $|f(x)|$ legkisebb felső korlátja 1. Azt akarjuk megmutatni, hogy

$$\left|\frac{2x}{1+x^2}\right| \leq 1$$

Ez pontosan akkor teljesül, ha

$$2|x| \leq 1 + x^2$$

vagyis

$$0 \leq 1 + x^2 - 2|x| = (1 - |x|^2)$$

ami pedig nyilvánvalóan igaz. Az is látható, hogy $|f|$ fel is veszi az 1 értéket.

2. feladat

Mutassunk olyan az egész számegyenesen értelmezett valós függvényt, ami semmilyen intervallumon se monoton.

Megoldás

Egy $H \subseteq \mathbb{R}$ halmaz karakterisztikus függvényén azt a χ_H-val jelölt függvényt értjük, ami a H halmaz elemein 1-et vesz fel értékként, $\mathbb{R} \setminus H$-n pedig 0-t. A feladat megoldása $\chi_{\mathbb{Q}}$, a racionális számok karakterisztikus függvénye, rövidebb nevén Dirichlet-függvény.
Ennek tehát racionális számokon 1 az értéke, irracionálisokon 0, és mivel minden intervallum egyaránt tartalmaz végtelen sok racionális és végtelen sok irracionális számot, ezért a Dirichlet-függvény egyetlen intervallumon sem monoton.

Definiáltuk a függvények periodicitását. Azt mondjuk, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénynek $T > 0$ *periódusa*, ha $\forall x \in \mathbb{R} : f(x+T) = f(x)$; az f függvény *periodikus*, ha létezik legkisebb pozitív periódusa (tehát pl. a konstans függvény nem periodikus).

3. feladat

Periodikus-e a Dirichlet-függvény?

Megoldás

Két racionális számok összege racionális, irracionális és racionális szám összege irracionális. Két irracionális szám összege lehet racionális és irracionális is. Pl. $\sqrt{2}+\sqrt{2}=2\sqrt{2}$ irracionális, $\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$ racionális. Ennek megfelően látható, hogy a Dirichlet-függvénynek minden racionális szám periódusa, viszont egyetlen irracionális szám se az; összességében mivel létezik tetszőlegesen kicsi pozitív racionális szám, a Dirichlet-függvény nem periodikus.

4. feladat

Mutassunk hasonlóan olyan az egész számegyenesen értelmezett valós függvényt, ami semmilyen intervallumon se korlátos. (Ennek a megoldását órán nem beszéltük meg.)

Megoldás

A megoldás az előzőhöz hasonló, de kicsit trükkösebb. A függvényünk az irracionális számokon továbbra is legyen 0. Minden racionális számot egyértelműen fel lehet írni $\frac{p}{q}$ alakban, ahol p és q relatív prím egészek, és q pozitív. A függvény az ilyen módon felírt tetszőleges $\frac{p}{q}$ racionális számon vegyen fel q-t értékként. Tetszőlegesen kicsi intervallumba esik akármilyen nagy nevezőjű egyszerűsített tört, így ez a függvény egyetlen intervallumon sem korlátos.