Matematika EP1 2. gyakorlat – numerikus sorozatok

Lelkes Ádám

2010. 09. 21.

1. feladat

Mutassuk meg, hogy az alábbi sorozat konvergens:

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$$

Megoldás

Világos, hogy a sorozat monoton. Megmutatjuk, hogy korlátos is.

$$\forall k > 1 : \frac{1}{k^2} \leq \frac{k}{k-1} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$$

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = 2$$

Ezután nagyrészt Az építészek matematikája I. c. jegyzet 74. oldaláról oldottunk meg feladatokat. Az alábbiakban néhány példa szerepel ezek közül.

2. feladat

Konvergens-e az alábbi sorozat, és ha igen, mi a határértéke?

$$a_n = 3^{\frac{1}{n}}$$

Megoldás

Azt sejtjük, hogy a sorozat konvergens, és a határérték 1. A következőt kell megmutatnunk:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : n > N \implies \left| 3^{\frac{1}{n}} - 1 \right| < \varepsilon$$

Legyen $\varepsilon > 0$ adott. Nyilván $3^{\frac{1}{n}} - 1 > 0$, így a következőnek kell teljesülnie elég nagy n-re:

$$3^{\frac{1}{n}} - 1 < \varepsilon$$

$$3^{\frac{1}{n}} < \varepsilon + 1$$

$$\frac{1}{n} < \log_3(\varepsilon + 1)$$

$$n > \frac{1}{\log_3(\varepsilon + 1)}$$

Végig ekvivalens átalakításokat végeztünk, így $N = [\frac{1}{\log_3(\varepsilon+1)}] + 1$ megfelelő küszöbindex.

3. feladat

Konvergens-e az alábbi sorozat, és ha igen, mi a határértéke?

$$a_n = \frac{4n+1}{n+3}$$

Megoldás

$$a_n = \frac{4n+1}{n+3} = \frac{4+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}} \longrightarrow 4$$

4. feladat

Konvergens-e az alábbi sorozat, és ha igen, mi a határértéke?

$$a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$$

Megoldás

$$a_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1} = \frac{(\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1})(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} =$$
$$= \frac{(n+2)-(n+1)}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} = \frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}} \longrightarrow 0$$