Matematika EP1 3. gyakorlat – hiperbolikus függvények, függvények határértéke

Lelkes Ádám

2010. 10. 05.

A gyakorlat elején bevezettük a hiperbolikus függvényeket, és levezettük a legfontosabb tulajdonságaikat. Ezek megtalálhatók a jegyzetben, vagy a Wikipédia vonatkozó oldalán:
http://hu.wikipedia.org/wiki/Hiperbolikus_függvények
Szerepelt továbbá a l'Hospital-szabály, miszerint ha $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ egy „$\frac{0}{0}$" vagy „$\frac{\infty}{\infty}$" típusú határérték, de a $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ határérték létezik, akkor

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Elhangzott ennek bizonyos értelemben vett diszkrét megfelelője, a Stolz–Cesàro-tétel, ami azt mondja ki, hogy ha $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ és $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ két valós sorozat, ami közül (b_n) szigorúan monoton növő és nem korlátos, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n},$$

amennyiben utóbbi határérték létezik. Ezt a tételt nem kötelező ismerni, de nem is tilos.

1. feladat

Határozzuk meg az alábbi határértéket:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3+3}{2x-1}$$

Megoldás

A polinomok folytonosak, így a hányadosuk is az, ha a nevező nem nulla. Itt az $x = 1$ helyen nem osztunk nullával, tehát egyszerűen be lehet helyettesíteni $x = 1$-et, és az eredmény 4.

2. feladat

Határozzuk meg az alábbi határértéket:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^3-x}$$

Megoldás

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^3-x} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{x(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x(x+1)} = \frac{0}{2} = 0$$

3. feladat

Határozzuk meg az alábbi határértéket:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-\sqrt{x}}{x-1}$$

Megoldás

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\sqrt{x}\frac{(\sqrt{x})^3-1}{(\sqrt{x})^2-1}=\lim_{x\to 1}\sqrt{x}\frac{(\sqrt{x}-1)((\sqrt{x})^2+\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\sqrt{x}\frac{(\sqrt{x})^2+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}=\frac{3}{2}$$

Vagy l'Hospital-szabállyal:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-\sqrt{x}}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{2x-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{1}=\frac{3}{2}$$