Matematika EP1 4. gyakorlat – függvények folytonossága, deriválás

Lelkes Ádám

2010. 10. 12.

1. feladat

Az a paraméter mely értékére lesz az alábbi függvény folytonos?

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\sin 5x}{\tan 10x}, & \text{ha } x \neq 0 \\ a, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

Megoldás

A kérdés azt sugallja, hogy a függvény a 0-ban a függvényérték alkalmas megválasztásával folytonossá tehető. Ez igaz, ha létezik (és véges) a függvény 0-beli határértéke. Tehát a kérdés az, hogy mivel egyenlő a következő határérték:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\tan 10x}$$

A következőt sejthetjük meg: mivel tudjuk, hogy $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, és $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$, azaz 0-hoz közel $\sin x \approx x$, $\tan x \approx x$, ezért $\sin 5x \approx 5x$, $\tan 10x \approx 10x$, vagyis $\frac{\sin 5x}{\tan 10x} \approx \frac{5}{10}$. Ha így gondolkodunk, az kézenfekvővé teszi a megoldást:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\tan 10x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{5x} \cdot \frac{10x}{\tan 10x} \cdot \frac{5}{10} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

Láthatóan ez egy ötletet igénylő megoldás – ha nem jut eszünkbe semmi, akkor – mivel „$\frac{0}{0}$" típusú határértékről van szó – használhatjuk a l'Hospital-szabályt is:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\tan 10x} = \lim_{x\to 0} \frac{(\sin 5x)'}{(\tan 10x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{5\cos 5x}{\frac{10}{\cos^2 10x}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

2. feladat

Mutassunk példát a teljes valós számegyenesen értelmezett, de egyetlen pontban sem folytonos függvényre.

Megoldás

Az első gyakorlatról ismerős $\chi_{\mathbb{Q}}$ Dirichlet-függvény ilyen. Legyen $a \in \mathbb{R}$ tetszőleges. Az átviteli elv segítségével megmutatjuk, hogy a függvény nem folytonos a-ban. Ha tudunk egy a-hoz tartó csupa racionális, ill. egy szintén a-hoz tartó csupa irracionális számokból álló sorozatot, akkor az előbbi mentén a függvény értéke konstans 1, utóbbi mentén konstans 0, így a függvény nem lehet folytonos a-ban. Azt kell csak végiggondolnunk, hogy ilyen sorozatok ténylegesen léteznek. $a \in \mathbb{Q}$ esetén az $s_n := a - \frac{1}{n}$ sorozat racionális számokból áll, és a-hoz tart, $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ esetén ez a sorozat szintén a-hoz tart, de csupa irracionális számokból áll. $a \in \mathbb{Q}$-hoz tarthatunk irracionális számokkal pl. a $t_n := a - \frac{\sqrt{2}}{n}$ sorozattal. $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$-t racionális számokkal pl. tizedesjegyenként közelíthetjük, azaz pl. $a = \sqrt{2}$ esetén az $1; 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142 \ldots$ sorozatra gondolhatunk. Természetesen rengeteg más lehetőség is van.

3. feladat

Mutassunk példát a teljes valós számegyenesen értelmezett, pontosan egy pontban folytonos függvényre.

Megoldás

Ez a feladat azért fontos, hogy megértsük: a folytonosság pontbeli tulajdonság. Az $x^2\chi_{\mathbb{Q}}$ függvény csak a 0-ban folytonos. Azt, hogy a 0-n kívül nem folytonos, ugyanúgy lehet bizonyítani, mint $\chi_{\mathbb{Q}}$ esetén. Viszont ha $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^2\chi_{\mathbb{Q}}(a_n) = 0$, hiszen $|\chi_{\mathbb{Q}}(a_n)| \leq a_n$.

Megjegyzés

Létezik olyan valós függvény is, ami pontosan az irracionális számokban folytonos: tekintsük azt a függvényt, ami irracionális számokhoz 0-t, 0-hoz 1-et, 0-tól különböző racionális számokhoz az egyszerűsített tört alakjukban található nevezőt rendeli. Azt, hogy ez tényleg pontosan az irracionális számokban folytonos, itt nem bizonyítjuk, de a matematika iránt érdeklődő hallgatók számára érdekes és tanulságos feladat.

4. feladat

Számítsuk ki a következő függvények deriváltját:

$$\sqrt{\tan x}, \quad \frac{\sin x}{x}, \quad e^{\sin x+\cos x}, \quad x^x, \quad x^{\sin x}, \quad x^{x^x}$$

(Gyakorlaton nem pontosan ezek, de hasonló jellegű feladatok szerepeltek.)

Megoldás

$$\sqrt{\tan x}' = \frac{1}{2\sqrt{\tan x}} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{\cos x \cdot x - \sin x \cdot 1}{x^2}$$

$$(e^{\sin x+\cos x})' = e^{\sin x+\cos x} \cdot (\cos x - \sin x)$$

$$(x^x)' = (e^{x\ln x})' = e^{x\ln x} \cdot \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^x(\ln x + 1)$$

$$(x^{\sin x})' = (e^{\sin x \ln x})' = e^{\sin x \ln x} \cdot \left(\cos x \ln x + \frac{\sin x}{x}\right)$$

$$\left(x^{x^x}\right)' = (e^{e^{x\ln x}\ln x})' = e^{e^{x\ln x}\ln x} \cdot (e^{x\ln x}\ln x)' = x^{x^x} \cdot \left(x^x(\ln x+1)\cdot \ln x + x^x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^{x^x+x}\left((\ln x+1)\cdot\ln x + \frac{1}{x}\right)$$