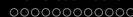
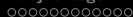


# Sorozatok

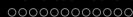
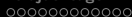
dr. Farkas Lóránt Ernő  
Sáfár Orsolya diái alapján

2019/2020 ősz



# Valós számsorozatok

Egy valós számsorozat egy hozzárendelési szabály, azaz egy olyan  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény, amely a pozitív egész számokhoz rendel valós számokat. Jelölése  $a_n$ .

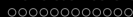
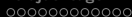


# Valós számsorozatok

Egy valós számsorozat egy hozzárendelési szabály, azaz egy olyan  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény, amely a pozitív egész számokhoz rendel valós számokat. Jelölése  $a_n$ .

Például  $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$  az a sorozat melynek első eleme  $a_1 = 1$ , második eleme  $a_2 = \frac{1}{2}$ , harmadik eleme  $a_3 = \frac{1}{3} \dots$

Vigyázzunk, az első pár elem nem adja meg egyértelműen a sorozatot, csakis a szabály!



# Valós számsorozatok

Egy valós számsorozat egy hozzárendelési szabály, azaz egy olyan  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény, amely a pozitív egész számokhoz rendel valós számokat. Jelölése  $a_n$ .

Például  $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$  az a sorozat melynek első eleme  $a_1 = 1$ , második eleme  $a_2 = \frac{1}{2}$ , harmadik eleme  $a_3 = \frac{1}{3} \dots$

Vigyázzunk, az első pár elem nem adja meg egyértelműen a sorozatot, csakis a szabály!

**Például** az  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 2$ ,  $a_3 = 4$  sorozatot többféle módon is folytathattunk volna. Például lehetne a hozzárendelési szabályunk  $a_n = 2^{n-1}$  ekkor  $a_4 = 8$ .



# Valós számsorozatok

Egy valós számsorozat egy hozzárendelési szabály, azaz egy olyan  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény, amely a pozitív egész számokhoz rendel valós számokat. Jelölése  $a_n$ .

Például  $(a_n) = (\frac{1}{n})$  az a sorozat melynek első eleme  $a_1 = 1$ , második eleme  $a_2 = \frac{1}{2}$ , harmadik eleme  $a_3 = \frac{1}{3} \dots$

Vigyázzunk, az első pár elem nem adja meg egyértelműen a sorozatot, csakis a szabály!

**Például** az  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 2$ ,  $a_3 = 4$  sorozatot többféle módon is folytathattunk volna. Például lehetne a hozzárendelési szabályunk  $a_n = 2^{n-1}$  ekkor  $a_4 = 8$ .

De lehetne  $a_n = \lceil \log_2(n) \rceil + \lceil \frac{n}{2} \rceil$  ekkor  $a_4 = 4$ .

# Korlátosság

Azt mondjuk, hogy az  $(a_n)$  sorozat korlátos, ha találunk olyan  $K$  pozitív valós számot, amelyre teljesül, hogy  $|a_n| \leq K$  az összes  $n$  indexre.

# Korlátosság

Azt mondjuk, hogy az  $(a_n)$  sorozat korlátos, ha találunk olyan  $K$  pozitív valós számot, amelyre teljesül, hogy  $|a_n| \leq K$  az összes  $n$  indexre.

**Példa:**  $(a_n) = ((-1)^n)$ . Ekkor a  $K = 1$  jó választás, hiszen  $|(-1)^n| = 1 \leq 1$ .

# Korlátosság

Azt mondjuk, hogy az  $(a_n)$  sorozat korlátos, ha találunk olyan  $K$  pozitív valós számot, amelyre teljesül, hogy  $|a_n| \leq K$  az összes  $n$  indexre.

**Példa:**  $(a_n) = ((-1)^n)$ . Ekkor a  $K = 1$  jó választás, hiszen  $|(-1)^n| = 1 \leq 1$ .

**Példa 2:**  $(a_n) = (\sin(n))$ . A  $K = 1$  erre is jó választás, hiszen  $|\sin(n)| \leq 1$ , mert minden valós szám szinusza legfeljebb 1.



# Korlátosság

Azt mondjuk, hogy az  $(a_n)$  sorozat korlátos, ha találunk olyan  $K$  pozitív valós számot, amelyre teljesül, hogy  $|a_n| \leq K$  az összes  $n$  indexre.

**Példa:**  $(a_n) = ((-1)^n)$ . Ekkor a  $K = 1$  jó választás, hiszen  $|(-1)^n| = 1 \leq 1$ .

**Példa 2:**  $(a_n) = (\sin(n))$ . A  $K = 1$  erre is jó választás, hiszen  $|\sin(n)| \leq 1$ , mert minden valós szám szinusza legfeljebb 1.

Valójában nem csak egy korlát van. Ugyanis, ha  $K$  korlát, akkor minden nála nagyobb szám is jó korlátnak. Általában nem fontos megtalálni a legjobb korlátot. Például a fenti sorozatokra a  $K = 2$  is jó korlát lenne.

# Korlátosság II

**Példa 3:**  $(a_n) = (n)$  nem korlátos, mert bármilyen valós számnál létezik nagyobb természetes szám (ezt az állítást Archimédeszi axiómának nevezik).

# Korlátosság II

**Példa 3:**  $(a_n) = (n)$  nem korlátos, mert bármilyen valós számnál létezik nagyobb természetes szám (ezt az állítást Archimédeszi axiómának nevezik).

## Bizonyítás.

(Indirekt): ha lenne valamilyen  $K$  valós korlátja a sorozatnak, akkor legyen  $N$  egy olyan természetes szám ami nagyobb  $K$ -nál ( $N > K$ ). Ekkor az  $N$ -edik indexű tagja a sorozatnak  $a_N = N$  ami nem kisebb a korlatnál. ■

# Monotonitás

Azt mondjuk, hogy az  $(a_n)$  sorozat monoton nő, ha minden  $n$  indexre teljesül, hogy  $a_{n+1} \geq a_n$ . A sorozat szigorú monoton nő, ha  $\geq$  helyett  $>$  is igaz.

# Monotonitás

Azt mondjuk, hogy az  $(a_n)$  sorozat monoton nő, ha minden  $n$  indexre teljesül, hogy  $a_{n+1} \geq a_n$ . A sorozat szigorú monoton nő, ha  $\geq$  helyett  $>$  is igaz.

**Példa:** Az  $a_n = n$  sorozat monoton nő és szigorúan monoton is nő, hiszen  $a_{n+1} = n + 1 > n = a_n$ .

# Monotonitás

Azt mondjuk, hogy az  $(a_n)$  sorozat monoton nő, ha minden  $n$  indexre teljesül, hogy  $a_{n+1} \geq a_n$ . A sorozat szigorú monoton nő, ha  $\geq$  helyett  $>$  is igaz.

**Példa:** Az  $a_n = n$  sorozat monoton nő és szigorúan monoton is nő, hiszen  $a_{n+1} = n + 1 > n = a_n$ .

**Példa 2:** Az  $b_n = \lceil \log_2(n) \rceil$  sorozat, melynek első néhány eleme  $0, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, \dots$  monoton nő, de nem szigorúan monoton nő.

# Monotonitás

Azt mondjuk, hogy az  $(a_n)$  sorozat monoton nő, ha minden  $n$  indexre teljesül, hogy  $a_{n+1} \geq a_n$ . A sorozat szigorú monoton nő, ha  $\geq$  helyett  $>$  is igaz.

**Példa:** Az  $a_n = n$  sorozat monoton nő és szigorúan monoton is nő, hiszen  $a_{n+1} = n + 1 > n = a_n$ .

**Példa 2:** Az  $b_n = \lceil \log_2(n) \rceil$  sorozat, melynek első néhány eleme  $0, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, \dots$  monoton nő, de nem szigorúan monoton nő.

**Példa 3:** A konstans sorozat (amelynek minden egyes eleme ugyanaz a szám) monoton nő, de nem szigorúan monoton nő. Emellett ez a sorozat monoton csökken is.

# Monotonitás

Azt mondjuk, hogy az  $(a_n)$  sorozat monoton nő, ha minden  $n$  indexre teljesül, hogy  $a_{n+1} \geq a_n$ . A sorozat szigorú monoton nő, ha  $\geq$  helyett  $>$  is igaz.

**Példa:** Az  $a_n = n$  sorozat monoton nő és szigorúan monoton is nő, hiszen  $a_{n+1} = n + 1 > n = a_n$ .

**Példa 2:** Az  $b_n = \lceil \log_2(n) \rceil$  sorozat, melynek első néhány eleme  $0, 1, 2, 2, 3, 3, 3, 3, 4, \dots$  monoton nő, de nem szigorúan monoton nő.

**Példa 3:** A konstans sorozat (amelynek minden egyes eleme ugyanaz a szám) monoton nő, de nem szigorúan monoton nő. Emellett ez a sorozat monoton csökken is.

Hasonlóan definiálható a monoton csökkenő sorozat is. Ha valamilyen sorozatra az mondjuk, hogy monoton, akkor arra gondolunk, hogy vagy monoton nő, vagy monoton csökken.



# Sorozat határértéke

Szeretnénk jellemezni a sorozat viselkedését nagy indexek esetén, erre szolgál a következő néhány definíció.

## Definíció

Azt mondjuk, hogy az  $(a_n)$  sorozat határértéke  $\infty$  ha minden határon túl nő, vagyis bármilyen nagy pozitív  $P$  számhoz található olyan  $N(P)$  küszöbindex, hogy a sorozat összes küszöbnél nagyobb indexű eleme a  $P$  számnál nagyobb. Jele:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ .

# Sorozat határértéke

Szeretnénk jellemezni a sorozat viselkedését nagy indexek esetén, erre szolgál a következő néhány definíció.

## Definíció

Azt mondjuk, hogy az  $(a_n)$  sorozat határértéke  $\infty$  ha minden határon túl nő, vagyis bármilyen nagy pozitív  $P$  számhoz található olyan  $N(P)$  küszöbindex, hogy a sorozat összes küszöbnél nagyobb indexű eleme a  $P$  számnál nagyobb. Jele:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ .

Ugyanez a definíció kvantorokkal megfogalmazva:

## Definíció

Azt mondjuk, hogy az  $(a_n)$  sorozat határértéke  $\infty$  ha  $\forall H \in \mathbb{R}^+$ -ra  $\exists N(H) \in \mathbb{R}$ , hogy  $a_n > H$  teljesül  $\forall n > N(H)$ -ra.

# Példák végtelenbe tartó sorozatokra

**Példa:** Az  $a_n = n$  sorozat végtelenbe tart, mert az

$$a_n = n > H$$

egyenlőtlenség teljesül minden  $n > H$  indexre.

# Példák végtelenbe tartó sorozatokra

**Példa:** Az  $a_n = n$  sorozat végtelenbe tart, mert az

$$a_n = n > H$$

egyenlőtlenség teljesül minden  $n > H$  indexre.

**Példa 2:** Az  $b_n = \log_2(n)$  sorozat végtelenbe tart, mert minden  $H > 0$ -ra a  $2^H$  jó küszöbindex mivel

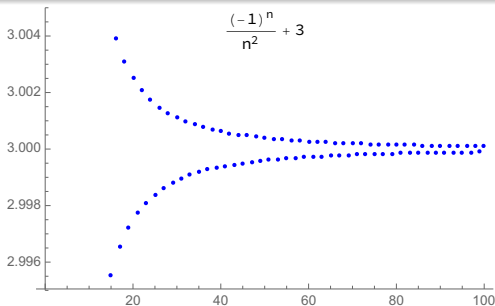
$$a_n = \log_2(n) > \log_2(2^H) = H.$$

Ez azt mutatja, hogy az  $N(H) = 2^H$  küszöb-hozzárendelés szabály jó.

# Sorozat véges határértéke

## Definíció

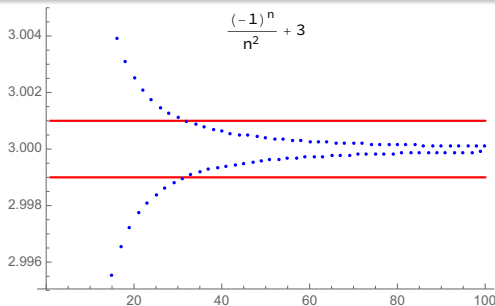
Azt mondjuk, hogy az  $(a_n)$  sorozat határértéke a  $A \in \mathbb{R}$  valós szám, ha bármilyen kicsi pozitív  $\varepsilon$  távolsághoz található olyan  $N(\varepsilon)$  küszöbindex, hogy a sorozat összes küszöbnél nagyobb indexű eleme az  $\varepsilon$  távolságnál közelebb esnek  $A$ -hoz. Jele:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ .



# Sorozat véges határértéke

## Definíció

Azt mondjuk, hogy az  $(a_n)$  sorozat határértéke a  $A \in \mathbb{R}$  valós szám, ha bármilyen kicsi pozitív  $\varepsilon$  távolsághoz található olyan  $N(\varepsilon)$  küszöbindex, hogy a sorozat összes küszöbnél nagyobb indexű eleme az  $\varepsilon$  távolságnál közelebb esnek  $A$ -hoz. Jele:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ .



# Precíz definíció, Konvergencia

Ugyanez a definíció kvantorokkal és képletekkel megfogalmazva:

## Definíció (az igazi)

*Azt mondjuk, hogy az  $(a_n)$  sorozat határértéke a  $A \in \mathbb{R}$  szám ha  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ -ra  $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{R}$ , hogy  $|a_n - A| < \varepsilon$  teljesül  $\forall n > N(\varepsilon)$ -ra.*

# Precíz definíció, Konvergencia

Ugyanez a definíció kvantorokkal és képletekkel megfogalmazva:

## Definíció (az igazi)

*Azt mondjuk, hogy az  $(a_n)$  sorozat határértéke a  $A \in \mathbb{R}$  szám ha  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ -ra  $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{R}$ , hogy  $|a_n - A| < \varepsilon$  teljesül  $\forall n > N(\varepsilon)$ -ra.*

Azon sorozatokat, amelyeknek létezik véges határértéke konvergensnek nevezzük.



# Precíz definíció, Konvergencia

Ugyanez a definíció kvantorokkal és képletekkel megfogalmazva:

## Definíció (az igazi)

*Azt mondjuk, hogy az  $(a_n)$  sorozat határértéke a  $A \in \mathbb{R}$  szám ha  $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ -ra  $\exists N(\varepsilon) \in \mathbb{R}$ , hogy  $|a_n - A| < \varepsilon$  teljesül  $\forall n > N(\varepsilon)$ -ra.*

Azon sorozatokat, amelyeknek létezik véges határértéke konvergensnek nevezzük.

**Példa:** Legyen  $(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)$ . Bizonyítsuk be a definíció szerint, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0!$

# Példa konvergenciára

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Ehhez azt kell megmutatnunk, hogy bármilyen kicsi  $\varepsilon > 0$ -ra,

$$|a_n - A| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n} \text{ kisebb lesz } \varepsilon\text{-nál, ha az index elég}$$

nagy.

# Példa konvergenciára

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Ehhez azt kell megmutatnunk, hogy bármilyen kicsi  $\varepsilon > 0$ -ra,

$|a_n - A| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n}$  kisebb lesz  $\varepsilon$ -nál, ha az index elég nagy. Tehát kell, hogy

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

elég nagy  $n$ -re.

# Példa konvergenciára

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Ehhez azt kell megmutatnunk, hogy bármilyen kicsi  $\varepsilon > 0$ -ra,

$|a_n - A| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n}$  kisebb lesz  $\varepsilon$ -nál, ha az index elég nagy. Tehát kell, hogy

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

elég nagy  $n$ -re. Szorozzuk be mindkét oldalt  $n > 0$ -val és osszuk el  $\varepsilon > 0$ -val!

$$\frac{1}{\varepsilon} < n$$

# Példa konvergenciára

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$$

Ehhez azt kell megmutatnunk, hogy bármilyen kicsi  $\varepsilon > 0$ -ra,

$|a_n - A| = \left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n}$  kisebb lesz  $\varepsilon$ -nál, ha az index elég nagy. Tehát kell, hogy

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

elég nagy  $n$ -re. Szorozzuk be mindkét oldalt  $n > 0$ -val és osszuk el  $\varepsilon > 0$ -val!

$$\frac{1}{\varepsilon} < n$$

Vagyis,  $|a_n - A| < \varepsilon$  ha  $n > \frac{1}{\varepsilon}$ . Így  $N(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$ .

## Példa 2

Legyen  $b_n = \left(3 + \frac{1}{2^n}\right)$ . Bizonyítsuk be a definíció szerint, hogy  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 3!$

## Példa 2

Legyen  $b_n = \left(3 + \frac{1}{2^n}\right)$ . Bizonyítsuk be a definíció szerint, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 3$ !

Most  $|b_n - A| = \left|3 + \frac{1}{2^n} - 3\right| = \frac{1}{2^n}$ -ről kell megmutatnunk, minden  $\varepsilon$ -nál kisebb. Így azt kell igazolnunk, hogy

$$\frac{1}{2^n} < \varepsilon,$$

ha  $n$  elég nagy.

## Példa 2

Legyen  $b_n = \left(3 + \frac{1}{2^n}\right)$ . Bizonyítsuk be a definíció szerint, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 3$ !

Most  $|b_n - A| = \left|3 + \frac{1}{2^n} - 3\right| = \frac{1}{2^n}$ -ről kell megmutatnunk, minden  $\varepsilon$ -nál kisebb. Így azt kell igazolnunk, hogy

$$\frac{1}{2^n} < \varepsilon,$$

ha  $n$  elég nagy.

A fenti egyenletet átrendezve és logartmust véve kapjuk.

$$\log_2 \left(\frac{1}{\varepsilon}\right) < n$$



## Példa 2

Legyen  $b_n = \left(3 + \frac{1}{2^n}\right)$ . Bizonyítsuk be a definíció szerint, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 3$ !

Most  $|b_n - A| = \left|3 + \frac{1}{2^n} - 3\right| = \frac{1}{2^n}$ -ről kell megmutatnunk, minden  $\varepsilon$ -nál kisebb. Így azt kell igazolnunk, hogy

$$\frac{1}{2^n} < \varepsilon,$$

ha  $n$  elég nagy.

A fenti egyenletet átrendezve és logartmust véve kapjuk.

$$\log_2 \left(\frac{1}{\varepsilon}\right) < n$$

Tehát  $N(\varepsilon) = \log_2 \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$ . Vegyük észre hogy az előző korlát is jó lenne.

# Konvergencia és korlátosság kapcsolata

## Tétel

*Minden konvergens sorozat korlátos.*

# Konvergencia és korlátosság kapcsolata

## Tétel

*Minden konvergens sorozat korlátos.*

## Bizonyítás (vázlat).

Ha  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$  akkor mondjuk  $A + 1$  fölé csak véges sok elem esik (hiszen az  $N(1)$  küszöbindex után minden elem  $[A - 1, A + 1]$ -be esik). A véges sok elem és  $A + 1$  maximuma felső korlát. Hasonlóan bizonyítjuk az alsó korlátot. ■

# Konvergencia és korlátosság kapcsolata

## Tétel

*Minden konvergens sorozat korlátos.*

## Bizonyítás (vázlat).

Ha  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$  akkor mondjuk  $A + 1$  fölé csak véges sok elem esik (hiszen az  $N(1)$  küszöbindex után minden elem  $[A - 1, A + 1]$ -be esik). A véges sok elem és  $A + 1$  maximuma felső korlát. Hasonlóan bizonyítjuk az alsó korlátot. ■

Az állítás megfordítása nem igaz, korlátos sorozatok nem feltétlen konvergensnek, például a  $(-1)^n$  sorozat korlátos, de mindig elugrik az előző értékétől.

# Konvergencia és korlátosság kapcsolata

## Tétel

*Minden konvergens sorozat korlátos.*

## Bizonyítás (vázlat).

Ha  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$  akkor mondjuk  $A + 1$  fölé csak véges sok elem esik (hiszen az  $N(1)$  küszöbindex után minden elem  $[A - 1, A + 1]$ -be esik). A véges sok elem és  $A + 1$  maximuma felső korlát. Hasonlóan bizonyítjuk az alsó korlátot. ■

Az állítás megfordítása nem igaz, korlátos sorozatok nem feltétlen konvergensnek, például a  $(-1)^n$  sorozat korlátos, de mindig elugrik az előző értékétől.

A két tulajdonság közötti kapcsolatot úgy fogalmazhatjuk meg, hogy a korlátosság *szükséges, de nem elégséges feltétele* a konvergenciának.

# Konvergencia és monotonitás kapcsolata

A monotonitás önmagában nem következik a konvergenciából, sem a monotonitásból a konvergencia.

# Konvergencia és monotonitás kapcsolata

A monotonitás önmagában nem következik a konvergenciából, sem a monotonitásból a konvergencia.

Erre két példa:

- a  $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$  sorozat, amely nem monoton, de konvergens.
- Illetve az  $b_n = n$  sorozat, amely monoton, viszont nem konvergens.

# Konvergencia és monotonitás kapcsolata

A monotonitás önmagában nem következik a konvergenciából, sem a monotonitásból a konvergencia.

Erre két példa:

- a  $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$  sorozat, amely nem monoton, de konvergens.
- Illetve az  $b_n = n$  sorozat, amely monoton, viszont nem konvergens.

Ugyanakkor:

## Tétel

*Ha sorozat korlátos és monoton akkor konvergens.*



# Konvergencia és monotonitás kapcsolata

A monotonitás önmagában nem következik a konvergenciából, sem a monotonitásból a konvergencia.

Erre két példa:

- a  $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$  sorozat, amely nem monoton, de konvergens.
- Illetve az  $b_n = n$  sorozat, amely monoton, viszont nem konvergens.

Ugyanakkor:

## Tétel

*Ha sorozat korlátos és monoton akkor konvergens.*

Az állítás nem megfordítható, mint láttuk nem minden konvergens sorozat monoton!

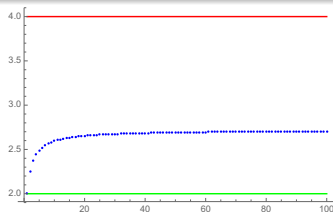
# Bizonyítás

## Bizonyítás (vázlat).

Tegyük fel, hogy  $a_n$  monoton nő, és felülről korlátos  $K$ -val. Legyen  $I_0 = [a_0, K] = [x_0, y_0]$ . Legyen  $m_0 = \frac{x_0 + y_0}{2}$  a két végpont számtani átlaga. Ha  $m_0$  felső korlát akkor  $I_1 = [x_0, m_0] = [x_1, y_1]$  ha nem akkor  $I_1 = [m_0, y_0] = [x_1, y_1]$ . Biztos hogy  $I_1$ -en kívül véges sok elem esik. Hasonlóan meghatározzuk  $m_1$ -et és abból  $I_2$ -t, és így tovább

...

Minden lépésben feleződik az intervallum hossza. Egy pontra „szorul rá” ami a határérték. ■

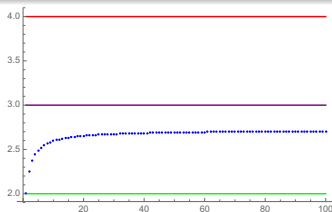


# Bizonyítás

## Bizonyítás (vázlat).

Tegyük fel, hogy  $a_n$  monoton nő, és felülről korlátos  $K$ -val. Legyen  $I_0 = [a_0, K] = [x_0, y_0]$ . Legyen  $m_0 = \frac{x_0 + y_0}{2}$  a két végpont számtani átlaga. Ha  $m_0$  felső korlát akkor  $I_1 = [x_0, m_0] = [x_1, y_1]$  ha nem akkor  $I_1 = [m_0, y_0] = [x_1, y_1]$ . Biztos hogy  $I_1$ -en kívül véges sok elem esik. Hasonlóan meghatározzuk  $m_1$ -et és abból  $I_2$ -t, és így tovább  
...

Minden lépésben feleződik az intervallum hossza. Egy pontra „szorul rá” ami a határérték. ■



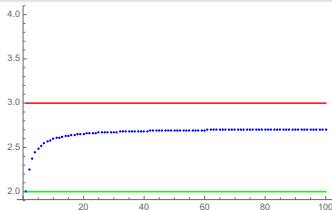
# Bizonyítás

## Bizonyítás (vázlat).

Tegyük fel, hogy  $a_n$  monoton nő, és felülről korlátos  $K$ -val. Legyen  $I_0 = [a_0, K] = [x_0, y_0]$ . Legyen  $m_0 = \frac{x_0 + y_0}{2}$  a két végpont számtani átlaga. Ha  $m_0$  felső korlát akkor  $I_1 = [x_0, m_0] = [x_1, y_1]$  ha nem akkor  $I_1 = [m_0, y_0] = [x_1, y_1]$ . Biztos hogy  $I_1$ -en kívül véges sok elem esik. Hasonlóan meghatározzuk  $m_1$ -et és abból  $I_2$ -t, és így tovább

...

Minden lépésben feleződik az intervallum hossza. Egy pontra „szorul rá” ami a határérték. ■



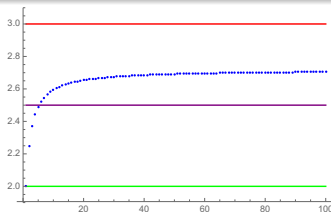
# Bizonyítás

## Bizonyítás (vázlat).

Tegyük fel, hogy  $a_n$  monoton nő, és felülről korlátos  $K$ -val. Legyen  $I_0 = [a_0, K] = [x_0, y_0]$ . Legyen  $m_0 = \frac{x_0 + y_0}{2}$  a két végpont számtani átlaga. Ha  $m_0$  felső korlát akkor  $I_1 = [x_0, m_0] = [x_1, y_1]$  ha nem akkor  $I_1 = [m_0, y_0] = [x_1, y_1]$ . Biztos hogy  $I_1$ -en kívül véges sok elem esik. Hasonlóan meghatározzuk  $m_1$ -et és abból  $I_2$ -t, és így tovább

...

Minden lépésben feleződik az intervallum hossza. Egy pontra „szorul rá” ami a határérték. ■

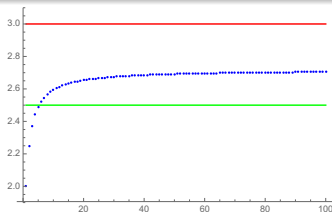


# Bizonyítás

## Bizonyítás (vázlat).

Tegyük fel, hogy  $a_n$  monoton nő, és felülről korlátos  $K$ -val. Legyen  $I_0 = [a_0, K] = [x_0, y_0]$ . Legyen  $m_0 = \frac{x_0 + y_0}{2}$  a két végpont számtani átlaga. Ha  $m_0$  felső korlát akkor  $I_1 = [x_0, m_0] = [x_1, y_1]$  ha nem akkor  $I_1 = [m_0, y_0] = [x_1, y_1]$ . Biztos hogy  $I_1$ -en kívül véges sok elem esik. Hasonlóan meghatározzuk  $m_1$ -et és abból  $I_2$ -t, és így tovább  
...

Minden lépésben feleződik az intervallum hossza. Egy pontra „szorul rá” ami a határérték. ■

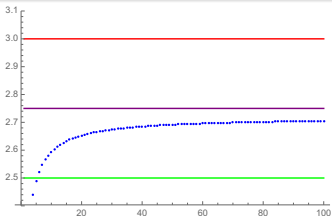


# Bizonyítás

## Bizonyítás (vázlat).

Tegyük fel, hogy  $a_n$  monoton nő, és felülről korlátos  $K$ -val. Legyen  $I_0 = [a_0, K] = [x_0, y_0]$ . Legyen  $m_0 = \frac{x_0 + y_0}{2}$  a két végpont számtani átlaga. Ha  $m_0$  felső korlát akkor  $I_1 = [x_0, m_0] = [x_1, y_1]$  ha nem akkor  $I_1 = [m_0, y_0] = [x_1, y_1]$ . Biztos hogy  $I_1$ -en kívül véges sok elem esik. Hasonlóan meghatározzuk  $m_1$ -et és abból  $I_2$ -t, és így tovább  
...

Minden lépésben feleződik az intervallum hossza. Egy pontra „szorul rá” ami a határérték. ■

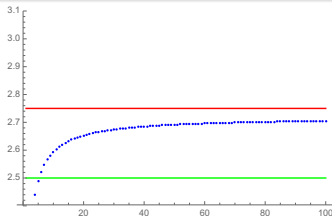


# Bizonyítás

## Bizonyítás (vázlat).

Tegyük fel, hogy  $a_n$  monoton nő, és felülről korlátos  $K$ -val. Legyen  $I_0 = [a_0, K] = [x_0, y_0]$ . Legyen  $m_0 = \frac{x_0 + y_0}{2}$  a két végpont számtani átlaga. Ha  $m_0$  felső korlát akkor  $I_1 = [x_0, m_0] = [x_1, y_1]$  ha nem akkor  $I_1 = [m_0, y_0] = [x_1, y_1]$ . Biztos hogy  $I_1$ -en kívül véges sok elem esik. Hasonlóan meghatározzuk  $m_1$ -et és abból  $I_2$ -t, és így tovább

...  
Minden lépésben feleződik az intervallum hossza. Egy pontra „szorul rá” ami a határérték.





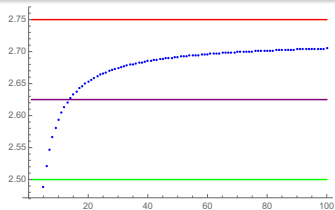
# Bizonyítás

## Bizonyítás (vázlat).

Tegyük fel, hogy  $a_n$  monoton nő, és felülről korlátos  $K$ -val. Legyen  $I_0 = [a_0, K] = [x_0, y_0]$ . Legyen  $m_0 = \frac{x_0+y_0}{2}$  a két végpont számtani átlaga. Ha  $m_0$  felső korlát akkor  $I_1 = [x_0, m_0] = [x_1, y_1]$  ha nem akkor  $I_1 = [m_0, y_0] = [x_1, y_1]$ . Biztos hogy  $I_1$ -en kívül véges sok elem esik. Hasonlóan meghatározzuk  $m_1$ -et és abból  $I_2$ -t, és így tovább

...

Minden lépésben feleződik az intervallum hossza. Egy pontra „szorul rá” ami a határérték.



# Műveletek sorozatokkal

Sorozatoknak értelmezhetjük lineárkombinációját: ha van  $a_n$  és  $b_n$  sorozatom akkor értelmezhetjük a  $c_1 \cdot a_n + c_2 \cdot b_n$  sorozatot.

# Műveletek sorozatokkal

Sorozatoknak értelmezhetjük lineárkombinációját: ha van  $a_n$  és  $b_n$  sorozatom akkor értelmezhetjük a  $c_1 \cdot a_n + c_2 \cdot b_n$  sorozatot.

- A sorozat konstansszorosát úgy értelmezzük, hogy a  $c \cdot a_n$  sorozat minden eleme az eredeti sorozat elemeinek  $c$ -szerese.  
**Példa:** Az  $n^2$ , azaz a  $1, 4, 9, \dots$  kezdetű sorozat kétszerese a  $2n^2$  sorozat, azaz a  $2, 8, 18, \dots$  kezdetű sorozat.
- Két sorozat összegét úgy kapjuk, hogy vesszük az elemek összegét.  
**Példa:** Az  $n^2$  és az  $n$  sorozat összege az  $n^2 + n$  sorozat, azaz a  $2, 6, 12, \dots$  kezdetű sorozat.

# Műveletek sorozatokkal

Sorozatoknak értelmezhetjük lineárkombinációját: ha van  $a_n$  és  $b_n$  sorozatom akkor értelmezhetjük a  $c_1 \cdot a_n + c_2 \cdot b_n$  sorozatot.

- A sorozat konstansszorosát úgy értelmezzük, hogy a  $c \cdot a_n$  sorozat minden eleme az eredeti sorozat elemeinek  $c$ -szerese.  
*Példa:* Az  $n^2$ , azaz a  $1, 4, 9, \dots$  kezdetű sorozat kétszerese a  $2n^2$  sorozat, azaz a  $2, 8, 18, \dots$  kezdetű sorozat.
- Két sorozat összegét úgy kapjuk, hogy vesszük az elemek összegét.  
*Példa:* Az  $n^2$  és az  $n$  sorozat összege az  $n^2 + n$  sorozat, azaz a  $2, 6, 12, \dots$  kezdetű sorozat.

Ehhez hasonlóan értelmezhetjük a sorozatok szorzatát és hányadosát. Hányadost csak akkor tudunk definiálni, ha azon sorozat, amellyel osztani szeretnénk, egyik eleme sem 0.

# Műveletek és korlátosság

Vizsgáljuk meg, hogy az előbb definiált műveletek megőrzik-e a korlátosságot!

# Műveletek és korlátosság

Vizsgáljuk meg, hogy az előbb definiált műveletek megőrzik-e a korlátosságot!

## Tétel

*Két korlátos sorozat összege is korlátos.*

# Műveletek és korlátosság

Vizsgáljuk meg, hogy az előbb definiált műveletek megőrzik-e a korlátosságot!

## Tétel

*Két korlátos sorozat összege is korlátos.*

## Bizonyítás.

Nevezzük az első sorozatot  $a_n$ -nek, a korlátját  $K_a$ -nak, a második sorozatot  $b_n$ -nek, az ő korlátját  $K_b$ -nek. Az állítás igazolásához tekintsük egy tetszőleges elemet az összegsorozatból! A

$$|a_n + b_n| \leq |a_n| + |b_n| \leq K_a + K_b$$

egyenlőtlenség mutatja, hogy az összeg is korlátos, mert a  $K_a + K_b$  jó korlát lesz  $(a_n + b_n)$ -re. ■

# Műveletek és korlátosság II

Az előbbi bizonyításhoz felhaszáltuk az úgynevezett *háromszög egyenlőtlenséget*:

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$



# Műveletek és korlátosság II

Az előbbi bizonyításhoz felhasználtuk az úgynevezett *háromszög egyenlőtlenséget*:

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

Nyilván, ha  $a_n$  korlátja  $K$  akkor  $c \cdot a_n$  korlátja  $|c|K$ .

# Műveletek és korlátosság II

Az előbbi bizonyításhoz felhaszáltuk az úgynevezett *háromszög egyenlőtlenséget*:

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

Nyilván, ha  $a_n$  korlátja  $K$  akkor  $c \cdot a_n$  korlátja  $|c|K$ .

Így bizonyítottuk, hogy korlátos sorozatok lineárkombinációja is korlátos.

# Műveletek és korlátosság II

Az előbbi bizonyításhoz felhaszáltuk az úgynevezett *háromszög egyenlőtlenséget*:

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

Nyilván, ha  $a_n$  korlátja  $K$  akkor  $c \cdot a_n$  korlátja  $|c|K$ .

Így bizonyítottuk, hogy korlátos sorozatok lineárkombinációja is korlátos.

Hasonlóképpen igazolható, hogy az  $a_n \cdot b_n$  sorozat is korlátos marad.

# Műveletek és korlátosság III

Sajnos a hányadosra viszont nem feltétlen teljesül a korlátosság.

# Műveletek és korlátosság III

Sajnos a hányadosra viszont nem feltétlen teljesül a korlátosság.

**Példa:**  $a_n = 1$  és  $b_n = \frac{1}{n}$ . Mindkét sorozat korlátos, még hozzá az 1 mindkettőnek korlátja. Viszont a hányadosra nem teljesül a korlátosság, hiszen:

$$\frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{\frac{1}{n}} = n,$$

amely mutatja, hogy a hányadossorozatnak nincsen felső korlátja.

# Műveletek és monotonitás

Vizsgáljuk meg, hogy az előbb a sorozatokra definiált műveletek megőrzik-e a monotonitást!

# Műveletek és monotonitás

Vizsgáljuk meg, hogy az előbb a sorozatokra definiált műveletek megőrzik-e a monotonitást!

## Tétel

*Két monoton növény sorozat összege is monoton növény.*

# Műveletek és monotonitás

Vizsgáljuk meg, hogy az előbb a sorozatokra definiált műveletek megőrzik-e a monotonitást!

## Tétel

*Két monoton növő sorozat összege is monoton növő.*

## Bizonyítás.

Nevezzük az első sorozatot  $a_n$ -nek, a második sorozatot  $b_n$ -nek. Az állítás igazolásához adjuk össze az  $a_n \leq a_{n+1}$  és a  $b_n \leq b_{n+1}$  egyenlőtlenségeket!A

$$a_n + b_n \leq a_{n+1} + b_{n+1}$$

egyenlőtlenség mutatja, hogy az összeg is monoton nő. ■



# Műveletek és monotonitás II

Ha egy monoton sorozatot konstanssal szorzunk, monoton marad, de ha negatív számmal szorozzuk, akkor növekvőből csökkenő, csökkenőből növekvő lesz.

# Műveletek és monotonitás II

Ha egy monoton sorozatot konstanssal szorzunk, monoton marad, de ha negatív számmal szorozzuk, akkor növekvőből csökkenő, csökkenőből növekvő lesz.

Így monoton növekvő/csökkenő sorozatok különbsége nem biztos hogy monoton lesz. **Példa:**  $n! - n^2$  nem monoton.

# Műveletek és monotonitás II

Ha egy monoton sorozatot konstanssal szorzunk, monoton marad, de ha negatív számmal szorozzuk, akkor növekvőből csökkenő, csökkenőből növekvő lesz.

Így monoton növekvő/csökkenő sorozatok különbsége nem biztos hogy monoton lesz. **Példa:**  $n! - n^2$  nem monoton.

Meglepő módon a szorzás sem őrzi meg a monotonitást

# Műveletek és monotonitás II

Ha egy monoton sorozatot konstanssal szorzunk, monoton marad, de ha negatív számmal szorozzuk, akkor növekvőből csökkenő, csökkenőből növekvő lesz.

Így monoton növekvő/csökkenő sorozatok különbsége nem biztos hogy monoton lesz. **Példa:**  $n! - n^2$  nem monoton.

Meglepő módon a szorzás sem őrzi meg a monotonitást

**Példa 2:** Legyen  $a_n = n^2$ ,  $b_n = \frac{-1}{n!}$ . Mindkét sorozat szigorú monoton nő, a szorzatuk,  $a_n \cdot b_n = -\frac{n^2}{n!} = -\frac{n}{(n-1)!}$  aminek első pár eleme  $-1, -4, -4,5, -2,6, \dots$  viszont nem monoton.

# Műveletek és konvergencia

Tfh  $a_n$  és  $b_n$  konvergens sorozatok és  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$ !

Ekkor:

- $c \cdot a_n$  is konvergens és  $\lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot a_n = c \cdot A$ .

# Műveletek és konvergencia

Tfh  $a_n$  és  $b_n$  konvergens sorozatok és  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$ !

Ekkor:

- $c \cdot a_n$  is konvergens és  $\lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot a_n = c \cdot A$ .
- $a_n + b_n$  is konvergens és  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = A + B$ .

# Műveletek és konvergencia

Tfh  $a_n$  és  $b_n$  konvergens sorozatok és  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$ !

Ekkor:

- $c \cdot a_n$  is konvergens és  $\lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot a_n = c \cdot A$ .
- $a_n + b_n$  is konvergens és  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = A + B$ .
- $a_n - b_n$  is konvergens és  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n - b_n = A - B$ .

# Műveletek és konvergencia

Tfh  $a_n$  és  $b_n$  konvergens sorozatok és  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$ !

Ekkor:

- $c \cdot a_n$  is konvergens és  $\lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot a_n = c \cdot A$ .
- $a_n + b_n$  is konvergens és  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = A + B$ .
- $a_n - b_n$  is konvergens és  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n - b_n = A - B$ .
- $a_n b_n$  is konvergens és  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = AB$ .



# Műveletek és konvergencia

Tfh  $a_n$  és  $b_n$  konvergens sorozatok és  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$ !

Ekkor:

- $c \cdot a_n$  is konvergens és  $\lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot a_n = c \cdot A$ .
- $a_n + b_n$  is konvergens és  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = A + B$ .
- $a_n - b_n$  is konvergens és  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n - b_n = A - B$ .
- $a_n b_n$  is konvergens és  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = AB$ .
- Ha  $b_n \neq 0$  semmilyen  $n$ -re és  $B \neq 0$  akkor  $(a_n/b_n)$  is konvergens és  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n = A/B$ .

# Műveletek és konvergencia II

Tfh  $a_n$  konvergens sorozat és  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ , ekkor:

# Műveletek és konvergencia II

Tfh  $a_n$  konvergens sorozat és  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ , ekkor:

- Ha  $p > 0$  tetszőleges pozitív egész konstans akkor  $a_n^p$  is konvergens és  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^p = A^p$ .
- Ha  $a_n \geq 0$  minden  $n$ -re akkor és  $q$  tetszőleges valós konstans és  $A \neq 0$ , akkor  $a_n^q$  is konvergens és  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^q = A^q$ .

# Műveletek és konvergencia II

Tfh  $a_n$  konvergens sorozat és  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$ , ekkor:

- Ha  $p > 0$  tetszőleges pozitív egész konstans akkor  $a_n^p$  is konvergens és  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^p = A^p$ .
- Ha  $a_n \geq 0$  minden  $n$ -re akkor és  $q$  tetszőleges valós konstans és  $A \neq 0$ , akkor  $a_n^q$  is konvergens és  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^q = A^q$ .

Az viszont, hogy ha  $a_n$  és  $b_n$  is konvergensek, akkor  $a_n^{b_n}$  határértéke  $A^B$  csak akkor igaz, ha  $A \geq 0$  és  $B$  véges.

# Műveletek és határérték

Tfh  $a_n$  konvergens  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A > 0$  és  $b_n$ -re  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ ! Ekkor:

- $a_n + b_n$  létezik határértéke  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = \infty$ .

# Műveletek és határérték

Tfh  $a_n$  konvergens  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A > 0$  és  $b_n$ -re  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ ! Ekkor:

- $a_n + b_n$  létezik határértéke  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = \infty$ .
- $a_n \cdot b_n$  létezik határértéke  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = \infty$ .

# Műveletek és határérték

Tfh  $a_n$  konvergens  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A > 0$  és  $b_n$ -re  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ ! Ekkor:

- $a_n + b_n$  létezik határértéke  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = \infty$ .
- $a_n \cdot b_n$  létezik határértéke  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = \infty$ .

# Műveletek és határérték

Tfh  $a_n$  konvergens  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A > 0$  és  $b_n$ -re  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty!$  Ekkor:

- $a_n + b_n$  létezik határértéke  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = \infty$ .
- $a_n \cdot b_n$  létezik határértéke  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = \infty$ .
- Ha  $b_n \neq 0$  semmilyen  $n$ -re és  $A \neq 0$  akkor  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n = 0$ .



# Műveletek és határérték

Tfh  $a_n$  konvergens  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A > 0$  és  $b_n$ -re  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty!$  Ekkor:

- $a_n + b_n$  létezik határértéke  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = \infty$ .
- $a_n \cdot b_n$  létezik határértéke  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot b_n = \infty$ .
- Ha  $b_n \neq 0$  semmilyen  $n$ -re és  $A \neq 0$  akkor  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n/b_n = 0$ .

Ha  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = C < 0$  akkor

- $b_n c_n$ -nek létezik határértéke és  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n = -\infty$

(akkor mondjuk, hogy  $b_n$  határértéke mínusz végtelen, ha  $-b_n$  határértéke végtelen)

# Műveletek végtelenhez tartó sorozatokkal

Tfh  $a_n$  és  $b_n$  olyan sorozatok, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ ,

$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = -\infty$ . Ekkor:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - c_n = \infty$ .

# Műveletek végtelenhez tartó sorozatokkal

Tfh  $a_n$  és  $b_n$  olyan sorozatok, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ ,  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = -\infty$ . Ekkor:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - c_n = \infty$ .
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \infty$ .

# Műveletek végtelenhez tartó sorozatokkal

Tfh  $a_n$  és  $b_n$  olyan sorozatok, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ ,  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = -\infty$ . Ekkor:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - c_n = \infty$ .
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \infty$ .
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n - a_n = -\infty$

# Műveletek végtelenhez tartó sorozatokkal

Tfh  $a_n$  és  $b_n$  olyan sorozatok, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ ,  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = -\infty$ . Ekkor:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - c_n = \infty$ .
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \infty$ .
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n - a_n = -\infty$

# Műveletek végtelenhez tartó sorozatokkal

Tfh  $a_n$  és  $b_n$  olyan sorozatok, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ ,  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = -\infty$ . Ekkor:

- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n + b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - c_n = \infty$ .
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \infty$ .
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n - a_n = -\infty$
- Ha  $a_n \geq 0$  minden  $n$ -re akkor és  $q$  tetszőleges pozitív valós konstans, akkor  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^q = \infty$ .

# Határozatlan határértékek: $\infty/\infty$

Tfh  $(a_n)$  és  $(b_n)$  olyan sorozatok, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ !  
Ekkor  $(a_n/b_n)$  határértéke bármi lehet, például:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n+1} = \infty,$$

# Határozatlan határértékek: $\infty/\infty$

Tfh  $(a_n)$  és  $(b_n)$  olyan sorozatok, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ !  
Ekkor  $(a_n/b_n)$  határértéke bármi lehet, például:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n+1} = \infty,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2} = 0,$$



# Határozatlan határértékek: $\infty/\infty$

Tfh  $(a_n)$  és  $(b_n)$  olyan sorozatok, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ !  
 Ekkor  $(a_n/b_n)$  határértéke bármi lehet, például:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n+1} = \infty,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2} = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1,$$

# Határozatlan határértékek: $\infty/\infty$

Tfh  $(a_n)$  és  $(b_n)$  olyan sorozatok, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$ !  
 Ekkor  $(a_n/b_n)$  határértéke bármi lehet, például:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n+1} = \infty,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n^2} = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1,$$

Ezen határértékek igazolása úgy történik, hogy a nevezőben lévő legyorsabban növvő taggal leosztunk és alkalmazzuk az eddig tanultakat,

# Határozatlan határértékek: $\infty \cdot 0$

Tfh  $(a_n)$  és  $(b_n)$  olyan sorozatok, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ !  
Ekkor  $(a_n b_n)$  határértéke bármi lehet, például:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \frac{1}{n+1} = \infty,$$

# Határozatlan határértékek: $\infty \cdot 0$

Tfh  $(a_n)$  és  $(b_n)$  olyan sorozatok, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ !  
Ekkor  $(a_n b_n)$  határértéke bármi lehet, például:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \frac{1}{n+1} = \infty,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \frac{1}{n^2} = 0,$$

# Határozatlan határértékek: $\infty \cdot 0$

Tfh  $(a_n)$  és  $(b_n)$  olyan sorozatok, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ !  
Ekkor  $(a_n b_n)$  határértéke bármi lehet, például:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \frac{1}{n+1} = \infty,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \frac{1}{n^2} = 0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) \frac{1}{n} = 1.$$