Elemi függvények, Komplex Számok

dr. Farkas Lóránt Ernő
Sáfár Orsolya diái alapján

2019/2020 ősz

Mi a függvény?

A függvény egy hozzárendelési szabály. Egy valós függvény a valós számokhoz, esetleg egy részükhöz rendel hozzá pontosan egy valós számot valamilyen szabály (nem feltétlen képlet) szerint.

Mi a függvény?

A függvény egy hozzárendelési szabály. Egy valós függvény a valós számokhoz, esetleg egy részükhöz rendel hozzá pontosan egy valós számot valamilyen szabály (nem feltétlen képlet) szerint.

Egy f függvény értelmezési tartománya azon valós számok halmaza, amelyre a szabályt megadtuk, jele: ÉT vagy $Dom(f)/D_f$.

Mi a függvény?

A függvény egy hozzárendelési szabály. Egy valós függvény a valós számokhoz, esetleg egy részükhöz rendel hozzá pontosan egy valós számot valamilyen szabály (nem feltétlen képlet) szerint.

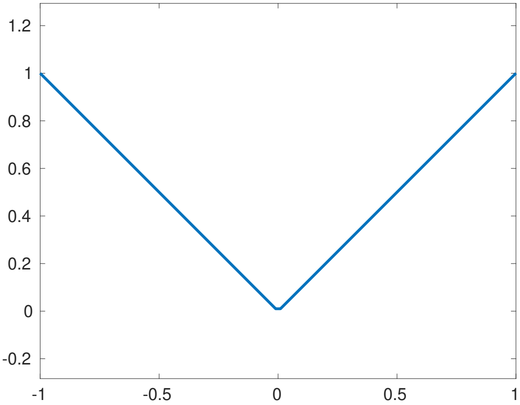
Egy f függvény értelmezési tartománya azon valós számok halmaza, amelyre a szabályt megadtuk, jele: ÉT vagy $Dom(f)/D_f$.

Az értékkészlet azon valós számok halmaza, amelyek előállnak képként, jele: ÉK vagy $Ran(f)/R_f$ vagy $Im(f)$

Példák

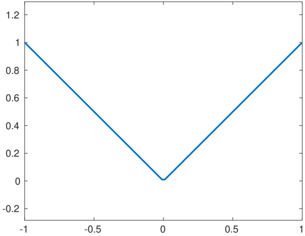
Abszolút érték: $f(x) = \begin{cases} \text{x} & \text{ha } x \geq 0 \\ \text{-x} & x < 0 \end{cases}$

Ezen függvény értelmezési tartománya $\mathbb{R}$, értékkészlete $\mathbb{R}_0^+$.



Monotonitás

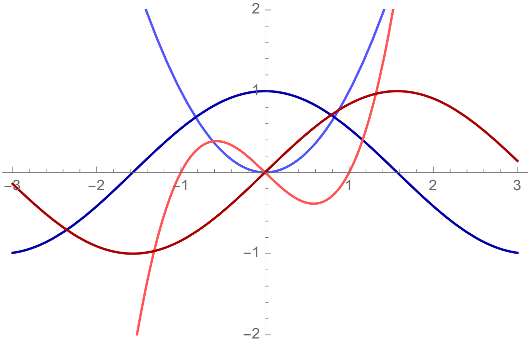
Azt mondjuk, hogy az f függvény monoton nő, H halmazon ha bármely $x_1 < x_2 \in H$-ra $f(x_1) \leq f(x_2)$. Szigorúan monoton nő, ha $f(x_1) < f(x_2)$ is igaz.



Az abszolút érték függvény például szigorúan monoton csökkenő a negatív számok halmazán $\mathbb{R}_0^-$-on és szigorúan monoton növő $\mathbb{R}_0^+$-on.

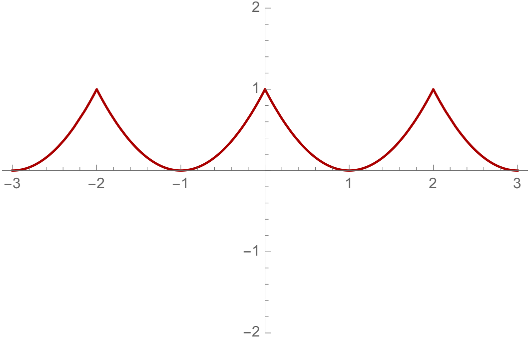
Paritás

Azt mondjuk, hogy az f függvény páros, ha $f(-x) = f(x)$(tengelyesen szimmetrikus). Azt mondjuk, hogy az f függvény páratlan, ha $f(-x) = -f(x)$(középpontosan szimmetrikus). Ezek csak akkor vizsgálhatóak, ha a D_f szimmetrikus az origóra.



Periodicitás

Azt mondjuk, hogy az f függvény periodikus T periódussal ha $f(x+T) = f(x)$. Ez is csak akkor értelemes ha az értelzési tartomány is periodikus, vagyis $x \in D_f \Rightarrow x + P \in D_f$ igaz.



Inverz

Ha $y = f(x)$ akkor a függvény inverze az a függvény amely y-hoz x-et rendeli. Jele f^{-1}.

Inverz

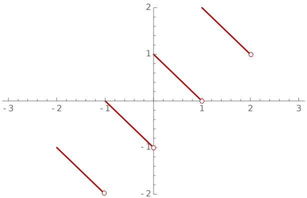
Ha $y = f(x)$ akkor a függvény inverze az a függvény amely y-hoz x-et rendeli. Jele f^{-1}.

Az f függvény pontosan akkor invertálható, ha R_f-ben minden szám csak egyszer áll elő x f szerinti képeként. Ehhez elégséges hogy f szigorú monoton legyen (de ez nem szükséges).

Inverz

Ha $y = f(x)$ akkor a függvény inverze az a függvény amely y-hoz x-et rendeli. Jele f^{-1}.

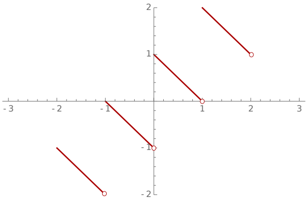
Az f függvény pontosan akkor invertálható, ha R_f-ben minden szám csak egyszer áll elő x f szerinti képeként. Ehhez elégséges hogy f szigorú monoton legyen (de ez nem szükséges).



Inverz

Ha $y = f(x)$ akkor a függvény inverze az a függvény amely y-hoz x-et rendeli. Jele f^{-1}.

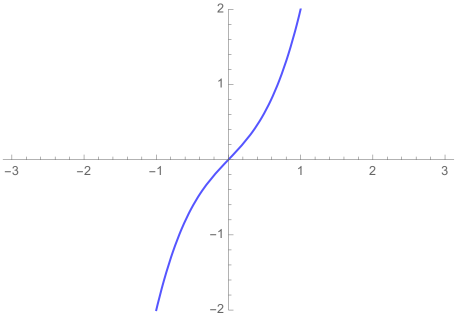
Az f függvény pontosan akkor invertálható, ha R_f-ben minden szám csak egyszer áll elő x f szerinti képeként. Ehhez elégséges hogy f szigorú monoton legyen (de ez nem szükséges).



Az inverz értelmezési tartománya megegyezik az eredeti függvény értékkészletével $D_{f^{-1}} = R_f$, és az inverz értékkészlete megegyezik az eredeti függvény értelmezési tartományával $R_{f^{-1}} = D_f$.

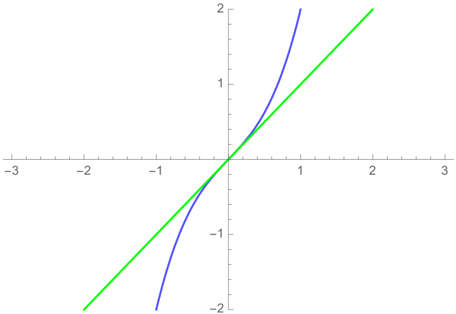
Inverz II

Az inverz grafikonja az eredeti függvény grafikonjának az $y = x$ egyenesre vett tükörképe.



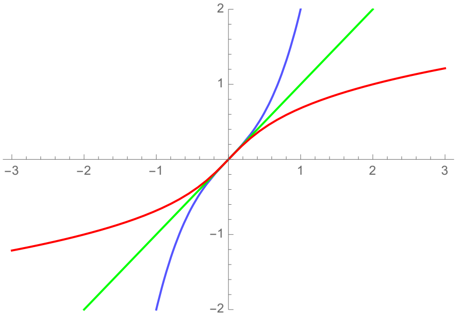
Inverz II

Az inverz grafikonja az eredeti függvény grafikonjának az $y = x$ egyenesre vett tükörképe.



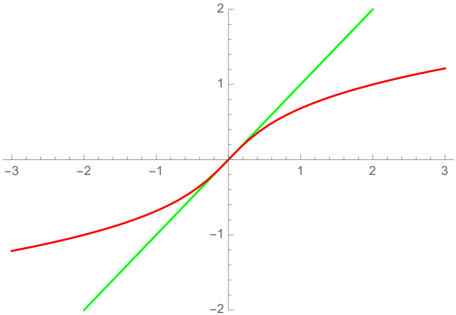
Inverz II

Az inverz grafikonja az eredeti függvény grafikonjának az $y = x$ egyenesre vett tükörképe.



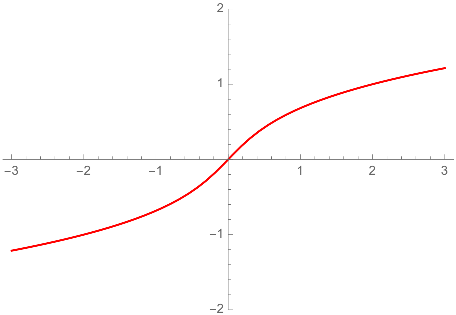
Inverz II

Az inverz grafikonja az eredeti függvény grafikonjának az $y = x$ egyenesre vett tükörképe.



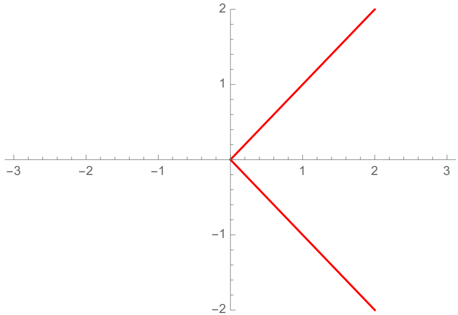
Inverz II

Az inverz grafikonja az eredeti függvény grafikonjának az $y = x$ egyenesre vett tükörképe.



Inverz II

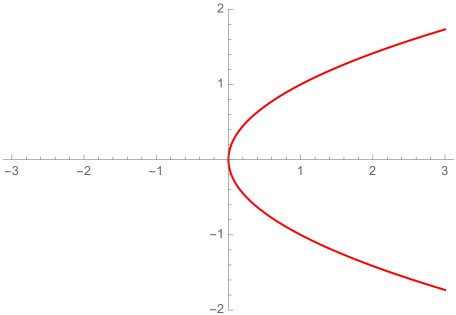
Az inverz grafikonja az eredeti függvény grafikonjának az $y = x$ egyenesre vett tükörképe.



Emiatt az abszolútérték függvény nem invertálható, hiszen a pozitív értékeket kétszer veszi fel.

Inverz II

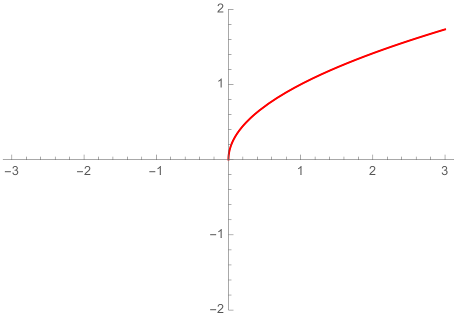
Az inverz grafikonja az eredeti függvény grafikonjának az $y = x$ egyenesre vett tükörképe.



Emiatt az abszolútérték függvény nem invertálható, hiszen a pozitív értékeket kétszer veszi fel.
Ugyanez a helyzet az x^2-el. Utóbbi esetben mégis értelmeztünk inverzet úgy, hogy leszűkítettük azt a halmazt, ahol invertáltuk a nemnegatív számokra.

Inverz II

Az inverz grafikonja az eredeti függvény grafikonjának az $y = x$ egyenesre vett tükörképe.



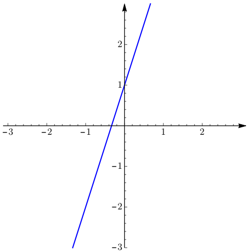
Emiatt az abszolútérték függvény nem invertálható, hiszen a pozitív értékeket kétszer veszi fel.
Ugyanez a helyzet az x^2-el. Utóbbi esetben mégis értelmeztünk inverzet úgy, hogy leszűkítettük azt a halmazt, ahol invertáltuk a nemnegatív számokra.

Példa az inverzre

Tegyük fel, hogy az $y = 3x + 1$ függvényt szeretnénk invertálni.

Példa az inverzre

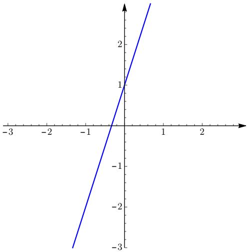
Tegyük fel, hogy az $y = 3x + 1$ függvényt szeretnénk invertálni.



Példa az inverzre

Tegyük fel, hogy az $y = 3x + 1$ függvényt szeretnénk invertálni.

$$\begin{aligned} y &= 3x + 1 \\ y - 1 &= 3x \\ \frac{y-1}{3} &= x \end{aligned}$$

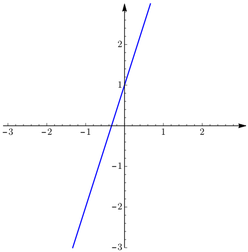


Példa az inverzre

Tegyük fel, hogy az $y = 3x + 1$ függvényt szeretnénk invertálni.

$$\begin{aligned} y &= 3x + 1 \\ y - 1 &= 3x \\ \frac{y-1}{3} &= x \end{aligned}$$

Tehát, ha az $f(x) = 3x + 1$ akkor $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{3}$.

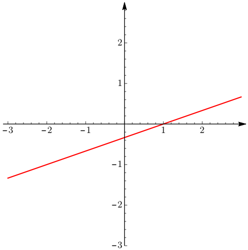


Példa az inverzre

Tegyük fel, hogy az $y = 3x + 1$ függvényt szeretnénk invertálni.

$$\begin{aligned} y &= 3x + 1 \\ y - 1 &= 3x \\ \frac{y-1}{3} &= x \end{aligned}$$

Tehát, ha az $f(x) = 3x + 1$ akkor $f^{-1}(x) = \frac{x-1}{3}$.

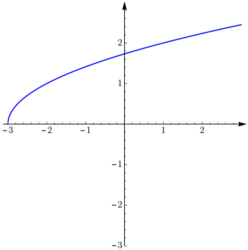


Példa az inverzre II

Tegyük fel, hogy az $y = \sqrt{x+3}$ függvényt szeretnénk invertálni.

Példa az inverzre II

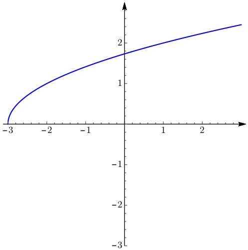
Tegyük fel, hogy az $y = \sqrt{x+3}$ függvényt szeretnénk invertálni.



Példa az inverzre II

Tegyük fel, hogy az $y = \sqrt{x+3}$ függvényt szeretnénk invertálni.

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x+3} \\ y^2 &= x+3 \\ y^2 - 3 &= x \end{aligned}$$

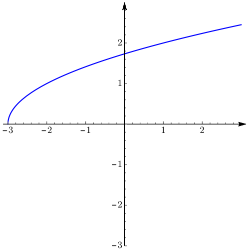


Példa az inverzre II

Tegyük fel, hogy az $y = \sqrt{x+3}$ függvényt szeretnénk invertálni.

$$
\begin{aligned}
y &= \sqrt{x+3} \\
y^2 &= x+3 \\
y^2 - 3 &= x
\end{aligned}
$$

Tehát, ha az $f(x) = \sqrt{x+3}$ akkor $f^{-1}(x) = x^2 - 3$.

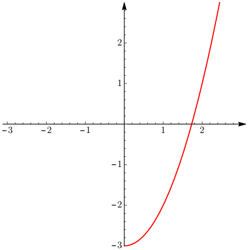


Példa az inverzre II

Tegyük fel, hogy az $y = \sqrt{x+3}$ függvényt szeretnénk invertálni.

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{x+3} \\ y^2 &= x+3 \\ y^2 - 3 &= x \end{aligned}$$

Tehát, ha az $f(x) = \sqrt{x+3}$ akkor $f^{-1}(x) = x^2 - 3$.



Nevezetes függvények-Exponenciális függvény: a^x

Számolási szabályok exponenciális kifejezésekre,

- ha a, b tetszőleges valós számok és α, β tetszőleges természetes számok: $a^\alpha \cdot b^\alpha = (a \cdot b)^\alpha \quad a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta} \quad (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha \cdot \beta}$
- illetve ha $a \neq 0$:
$$a^{-\alpha} = \frac{1}{a^\alpha} \quad \frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta} \quad a^0 = 1$$

Vigyázat!

$$(a^\alpha)^\beta \neq a^{\alpha^\beta} = a^{(\alpha^\beta)},$$

így például $10^{10^2} \neq 10^{20}$ hanem $10^{(10^2)} = 10^{100}$!

Nevezetes függvények-Exponenciális függvény: a^x

Számolási szabályok exponenciális kifejezésekre (gyökökre) ha $a > 0$:

$$\sqrt[\alpha]{a} = a^{\frac{1}{\alpha}} \qquad \sqrt[\alpha]{a^\beta} = a^{\frac{\beta}{\alpha}} = \left(\sqrt[\alpha]{a}\right)^\beta \qquad \sqrt[\alpha]{a \cdot b} = \sqrt[\alpha]{a} \cdot \sqrt[\alpha]{b}$$

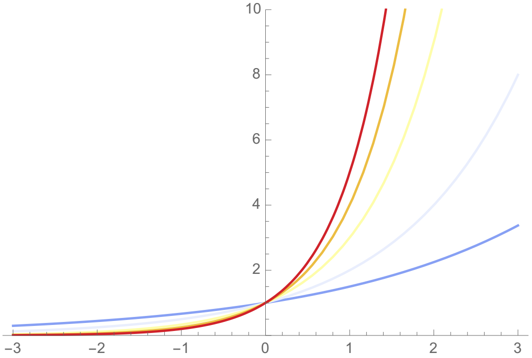
Vigyázat!

$$\sqrt[n^2]{2} \neq \sqrt{\sqrt[n]{2}},$$

hanem $\sqrt[n^2]{2} = \sqrt[n]{\sqrt[n]{2}}$ míg $\sqrt{\sqrt[n]{2}} = \sqrt[2n]{2}$!

Exponenciális függvények

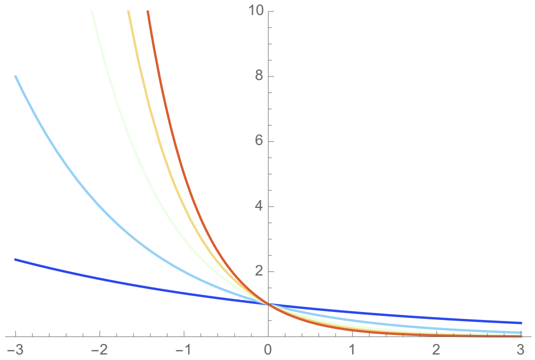
Az a^x függvény képe, ha $a > 1$:



A teljes $\mathbb{R}$-en értelmezett, értékkészlete $\mathbb{R}^+$, szigorú monoton nő.

Exponenciális függvények $0 < b < 1$

Mivel $b^x = \left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$, ezért pont az a^x y tengelyre vett tükörképe.



A teljes $\mathbb{R}$-en értelmezett, értékkészlete $\mathbb{R}^+$, szigorú mon. csökken.

Nevezetes függvények - log

A logaritmus függvény az exponenciális függvény inverze. Definíció szerint $\log_a b$ az a szám, amelyre a-t emelve b-t kapjuk, azaz

$$a^{\log_a b} = b$$

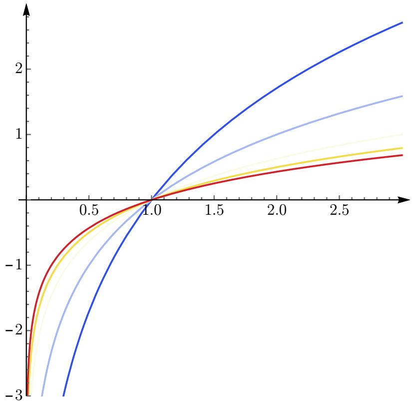
Ez a definíció köti össze az exponenciális kifejezések számolási szabályait a logaritmusos kifejezésekével. Tegyük fel, hogy $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$, $b,c,d \in \mathbb{R}^+$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ekkor

$$\log_a(c \cdot d) = \log_a c + \log_a d \qquad \log_a(b^\alpha) = \alpha \log_a b$$

$$\log_a\left(\frac{b}{c}\right) = \log_a b - \log_a c \qquad \log_a 1 = 0,\ \log_a a = 1$$

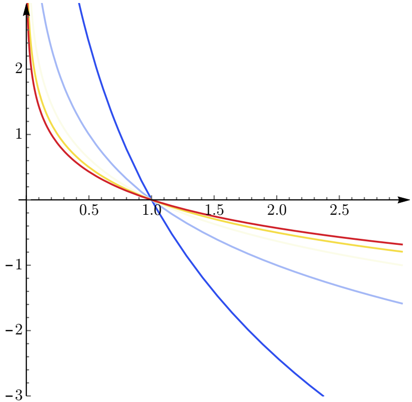
Nevezetes függvények - $\log_a x$, $a > 1$

Mivel a^x a teljes $\mathbb{R}$-en értelmezett, értékkészlete $\mathbb{R}^+$, szigorú monoton nő, így az inverze $\mathbb{R}^+$-n értelmezett, értékkészlete $\mathbb{R}$ és szigorú monoton nő.



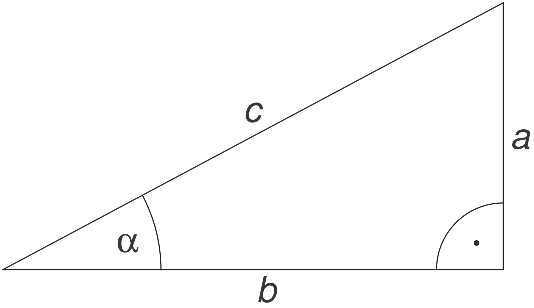
Nevezetes függvények - $\log_b x$, $0 < b < 1$

Mivel b^x a teljes $\mathbb{R}$-en értelmezett, értékkészlete $\mathbb{R}^+$, szigorú monoton csökken, így az inverze $\mathbb{R}^+$-n értelmezett, értékkészlete $\mathbb{R}$ és szigorú monoton csökken.



Trigonometrikus függvények - sin, cos, tan

Definíció hegyesszögekre: legyenek egy derékszögű háromszög befogóinak hossza a és b, átfogójának hossza c. Az a oldallal szembeni szöge α. Ekkor:



Definíció szerint:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \quad \cos\alpha = \frac{b}{c} \quad \tan\alpha = \frac{a}{b}$$

Trigonometrikus függvények - sin, cos

Ebből következően néhány nevezetes érték:

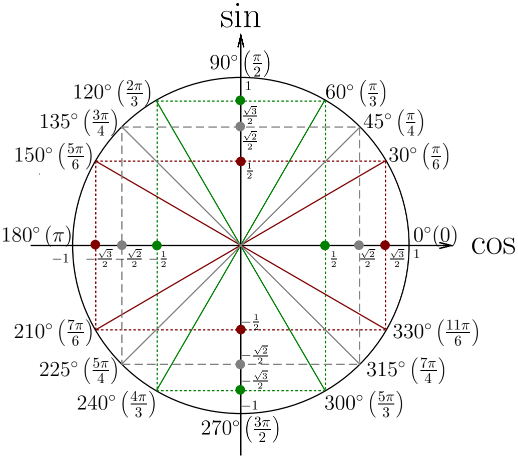
$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

Trigonometrikus függvények - sin, cos

Kiterjesztés az összes szögre (az ábráért köszönet Nagy Ilonának)



Trigonometrikus függvények - sin, cos

Kiterjesztés alapján az többi nevezetes érték:

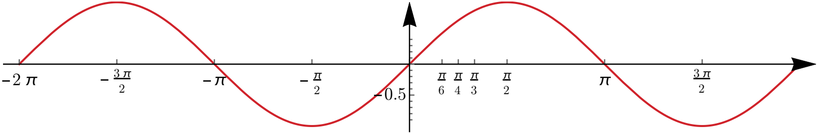
$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=(-1)^k$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+k\pi\right)=0$$

$$\sin(k\pi)=0$$

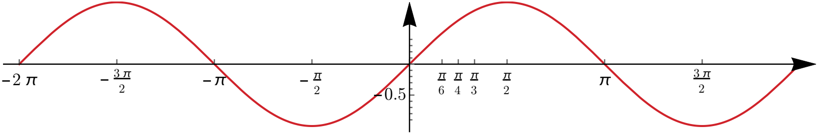
$$\cos(k\pi)=(-1)^k$$

Trigonometrikus függvények - sin



Értelmezési tartománya a teljes $\mathbb{R}$, értékkészlete a $[-1{,}1]$.
Nem monoton, 2π periodikus, páratlan ($\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$).
Egyéb szimmetriái: $\sin(\alpha + \pi) = -\sin(\alpha)$, $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha$.

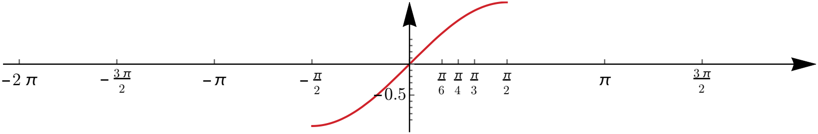
Trigonometrikus függvények - sin



Értelmezési tartománya a teljes $\mathbb{R}$, értékkészlete a $[-1,1]$.
Nem monoton, 2π periodikus, páratlan ($\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$).
Egyéb szimmetriái: $\sin(\alpha + \pi) = -\sin(\alpha)$, $\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha$.

Szertnénk invertálni, de nem monoton. Mit csináljunk?

Trigonometrikus függvények – sin



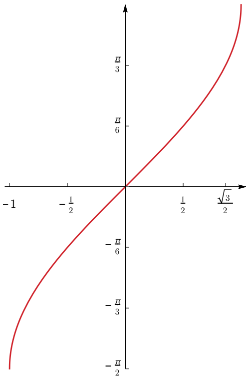
Értelmezési tartománya a teljes $\mathbb{R}$, értékkészlete a $[-1,1]$.
Nem monoton, 2π periodikus, páratlan ($\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$).
Egyéb szimmetriái: $\sin(\alpha+\pi) = -\sin(\alpha)$, $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha$.

Szertnénk invertálni, de nem monoton. Mit csináljunk?

Csonkolunk!

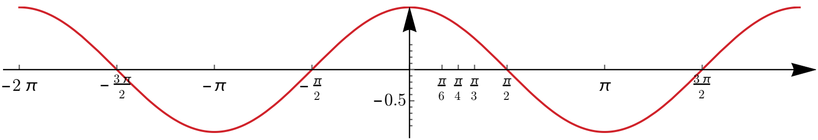
Nevezetes függvények: arcsin

Az arcsin függvény a csonkolt sin függvény inverze.



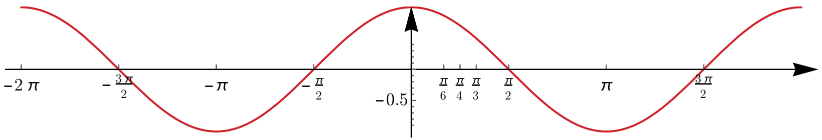
Értelmezési tartománya a $[-1,1]$, értékkészlete a $\left[\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$, szigorú monoton nő, páratlan.

Trigonometrikus függvények - cos



Értelmezési tartománya a teljes $\mathbb{R}$, értékkészlete a $[-1,1]$.
Nem monoton, 2π periodikus, páros, azaz $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$.
Egyéb szimmetriái: $\cos(\alpha+\pi) = -\cos\alpha$, $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha$

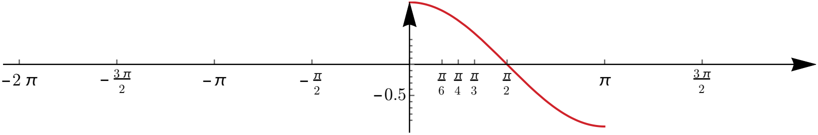
Trigonometrikus függvények - cos



Értelmezési tartománya a teljes $\mathbb{R}$, értékkészlete a $[-1,1]$.
Nem monoton, 2π periodikus, páros, azaz $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$.
Egyéb szimmetriái: $\cos(\alpha+\pi) = -\cos\alpha$, $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha$

Szertnénk invertálni, de nem monoton. Mit csináljunk?

Trigonometrikus függvények - cos



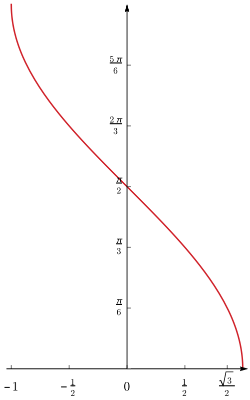
Értelmezési tartománya a teljes $\mathbb{R}$, értékkészlete a $[-1,1]$.
Nem monoton, 2π periodikus, páros, azaz $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$.
Egyéb szimmetriái: $\cos(\alpha+\pi) = -\cos\alpha$, $\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha$

Szertnénk invertálni, de nem monoton. Mit csináljunk?

Csonkolunk!

Nevezetes függvények: arccos

Az arcsin függvény a csonkolt cos függvény inverze.



Értelmezési tartománya a $[-1,1]$, értékkészlete a $[0,\pi]$, szigorú monoton csökken.

Trigonometrikus függvények - tan

A tan alternatív definíciója: $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.
Ebből következően a nevezetes értékek:

$$\tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

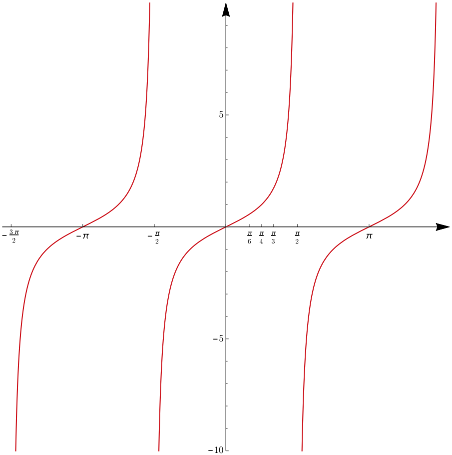
$$\tan\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$\tan\frac{\pi}{4} = 1$$

$$\tan(k\pi) = 0$$

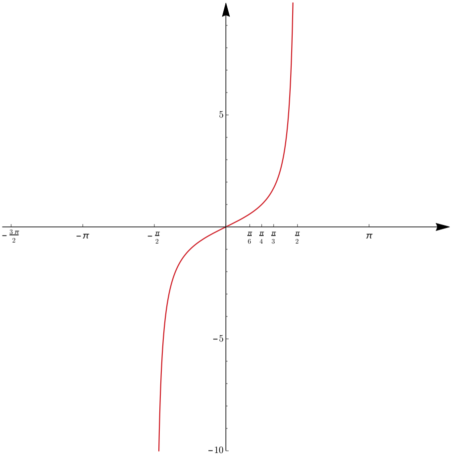
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \quad \text{nem értelmezett}$$

Trigonometrikus függvények - tan



Értelmezési tartománya: $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$, értékkészlete a $\mathbb{R}$.
Nem monoton, π periodikus, páratlan, azaz $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$.

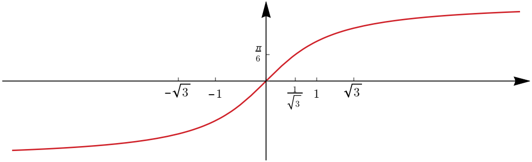
Trigonometrikus függvények - tan



Értelmezési tartománya: $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}$, értékkészlete a $\mathbb{R}$.
Nem monoton, π periodikus, páratlan, azaz $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$.

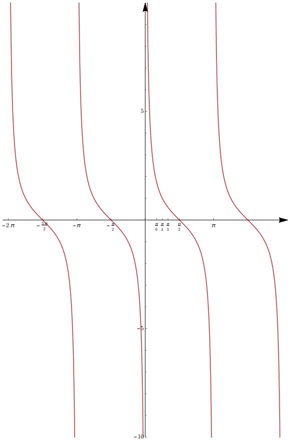
Nevezetes függvények: arctan

A tan esetében a $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$-n.



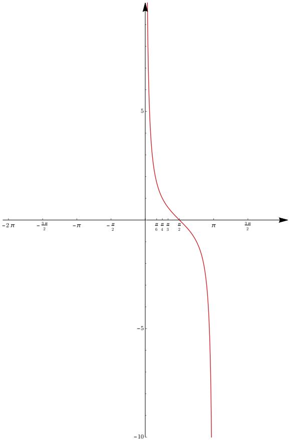
Értelmezési tartománya a $\mathbb{R}$, értékkészlete $\left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, szigorú monoton nő, páratlan.

Trigonometrikus függvények - ctg



Értelmezési tartománya: $\mathbb{R} \setminus \{0 + k\pi\}$, értékkészlete a $\mathbb{R}$.
Nem monoton, π periodikus, páratlan, azaz $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$.

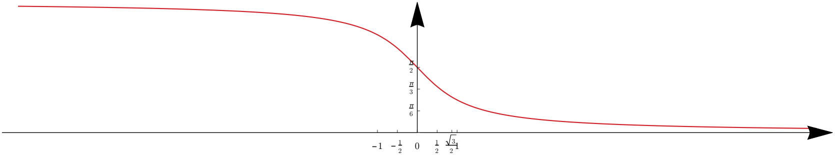
Trigonometrikus függvények - ctg



Értelmezési tartománya: $\mathbb{R} \setminus \{0 + k\pi\}$, értékkészlete a $\mathbb{R}$.
Nem monoton, π periodikus, páratlan, azaz $\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$.

Nevezetes függvények: arcctg

A ctg esetében a $(0,\pi)$-n.



Értelmezési tartománya a $\mathbb{R}$, értékkészlete $(0,\pi)$, szigorú monoton nő, páratlan.

Összefüggések a szögfüggvények között

Tegyük fel, hogy $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, ekkor

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

Összefüggések a szögfüggvények között

Tegyük fel, hogy $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, ekkor

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

A kétszeres szögekre:

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

és

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha.$$

Összefüggések a szögfüggvények között

Tegyük fel, hogy $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, ekkor

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

A kétszeres szögekre:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

és

$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha.$$

Felhasználva a koszinusz kétszeres szögekre vonatkozó összefüggést kapjuk a linearizáló azonosságokat:

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos(2\alpha)}{2} \quad \text{és} \quad \cos^2\alpha = \frac{1+\cos(2\alpha)}{2}$$

Összefüggések a szögfüggvények között II

Végül két szög összegére az addíciós tételek:

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha \\
\sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha \quad \text{és} \\
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta
\end{aligned}$$

Összefüggések a szögfüggvények között II

Végül két szög összegére az addíciós tételek:

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha \\
\sin(\alpha-\beta) &= \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha \quad \text{és} \\
\cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha-\beta) &= \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta
\end{aligned}$$

Ezekből:

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha)\cos(\beta) &= \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\right] \\
\sin(\alpha)\sin(\beta) &= \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right] \\
\cos(\alpha)\cos(\beta) &= \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right]
\end{aligned}$$

Összefüggések a szögfüggvények között III

A $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ és a $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ összefüggésből az is következik, hogy

$$\frac{1}{\cos^2(\alpha)} = 1 + \tan^2(\alpha)$$

Minden $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$-re.

Összefüggések a szögfüggvények között III

A $\sin^2(\alpha)+\cos^2(\alpha)=1$ és a $\tan(\alpha)=\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$ összefüggésből az is következik, hogy

$$\frac{1}{\cos^2(\alpha)} = 1+\tan^2(\alpha)$$

Minden $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$-re.

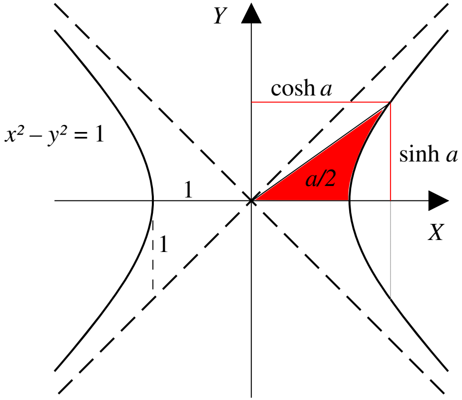
Amiből:

$$\sin(\alpha) = \frac{2\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

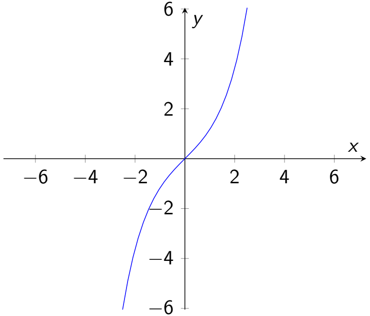
$$\cos(\alpha) = \frac{1-\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

Hiperbolikus függvények - sinh, cosh

Kiterjeszrhetjük a sin-t, cos-t a hiperbolára.



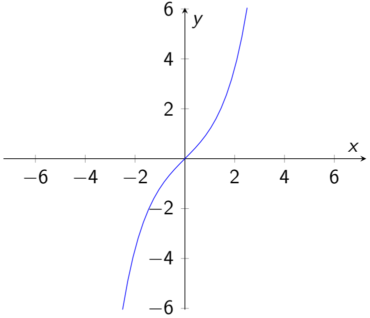
Hiperbolikus függvények - sinh



Képelete:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Hiperbolikus függvények - sinh



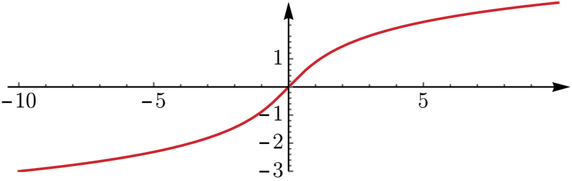
Képelete:

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Értelmezési tartománya a teljes $\mathbb{R}$, értékkészlete is $\mathbb{R}$. Szigorúan monoton növő, nem periodikus, páratlan ($\sinh(-x) = -\sinh(x)$).

Nevezetes függvények: arsinh

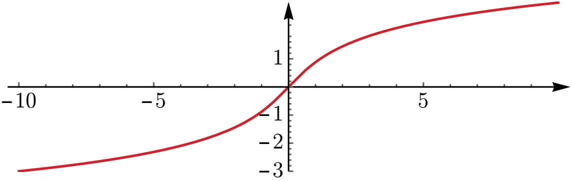
Az arsinh függvény a sinh függvény inverze.



$$\operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

Nevezetes függvények: arsinh

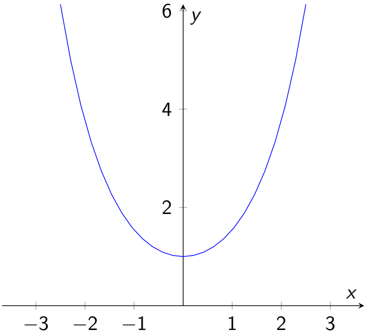
Az arsinh függvény a sinh függvény inverze.



$$\operatorname{arsinh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

Értelmezési tartománya a $\mathbb{R}$, értékkészlete szintén $\mathbb{R}$, szigorú monoton nő, páratlan.

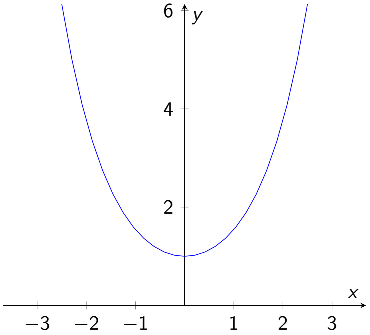
Hiperbolikus függvények - cosh



Képelete:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Hiperbolikus függvények - cosh

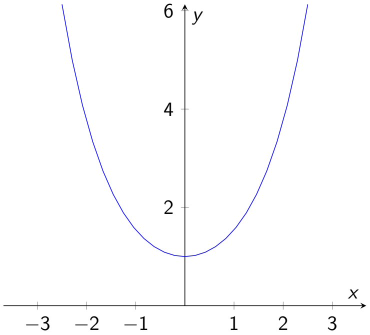


Képelete:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Értelmezési tartománya a teljes $\mathbb{R}$, értékkészlete $[1,\infty)$. Nem monoton, nem periodikus, páros ($\cosh(-x) = \cosh(x)$).

Hiperbolikus függvények - cosh

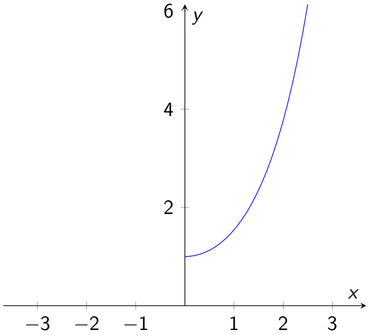


Képelete:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Értelmezési tartománya a teljes $\mathbb{R}$, értékkészlete $[1,\infty)$. Nem monoton, nem periodikus, páros ($\cosh(-x) = \cosh(x)$). Szertnénk invertálni, de nem monoton. Mit csináljunk?

Hiperbolikus függvények - cosh



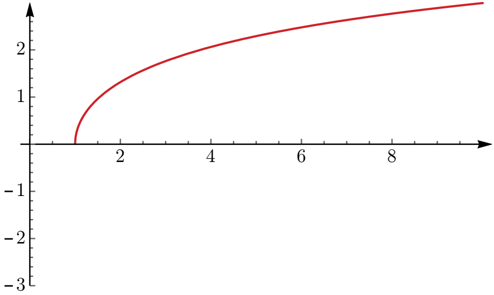
Képelete:

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Értelmezési tartománya a teljes $\mathbb{R}$, értékkészlete $[1,\infty)$. Nem monoton, nem periodikus, páros ($\cosh(-x) = \cosh(x)$). Szertnénk invertálni, de nem monoton. Mit csináljunk?

Nevezetes függvények: arcosh

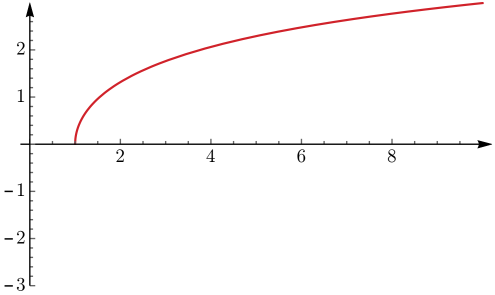
Az arcosh függvény a cosh függvény inverze.



$$\mathrm{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

Nevezetes függvények: arcosh

Az arcosh függvény a cosh függvény inverze.



$$\mathrm{arcosh}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

Értelmezési tartománya az $[1,\infty)$, értékkészlete $\mathbb{R}^+$, szigorú monoton nő.

Összefüggések a hiperbolikus függvények között

Tegyük fel, hogy $x, y \in \mathbb{R}$, ekkor

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

Összefüggések a hiperbolikus függvények között

Tegyük fel, hogy $x, y \in \mathbb{R}$, ekkor

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

A kétszeres szögekre:

$$\sinh(2x) = 2 \sinh x \cosh x$$

és

$$\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x.$$

Összefüggések a hiperbolikus függvények között

Tegyük fel, hogy $x, y \in \mathbb{R}$, ekkor

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

A kétszeres szögekre:

$$\sinh(2x) = 2 \sinh x \cosh x$$

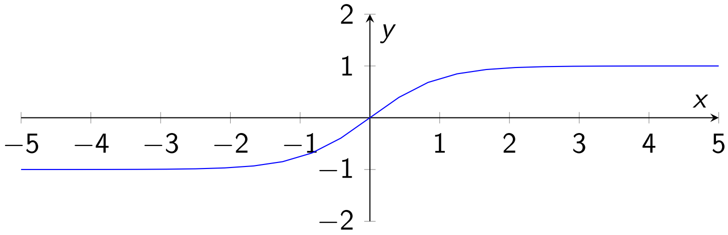
és

$$\cosh(2x) = \cosh^2 x + \sinh^2 x.$$

Felhasználva a koszinusz hiperbolikusz kétszeres szögekre vonatkozó összefüggését kapjuk a linearizáló azonosságokat:

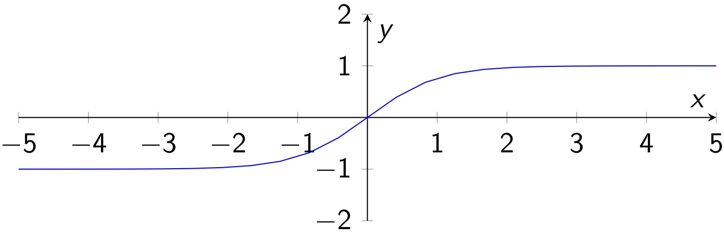
$$\sinh^2 x = \frac{\cosh(2x) - 1}{2} \quad \text{és} \quad \cosh^2 x = \frac{1 + \cosh(2x)}{2}$$

Hiperbolikus függvények - tanh



$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

Hiperbolikus függvények - tanh

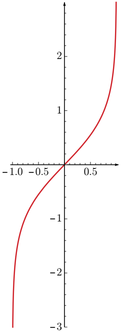


$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

Értelmezési tartománya: $\mathbb{R}$, értékkészlete a $[-1,1]$. Szigorúan monoton növő, páratlan, azaz $\tanh(-x) = -\tanh(x)$.

Nevezetes függvények: artanh

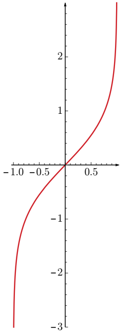
Az artanh függvény a tanh függvény inverze.



$$\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Nevezetes függvények: artanh

Az artanh függvény a tanh függvény inverze.



$$\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Értelmezési tartománya az $[-1,1]$, értékkészlete $\mathbb{R}$, szigorú monoton nő, páratlan.

Felfedezésük

Az első kapcsolódó említés Alekszandriai Hérón munkáiban tünik fel —hibás képletek részeként.

Felfedezésük

Az első kapcsolódó említés Alekszandriai Hérón munkáiban tünik fel —hibás képletek részeként.

Az első polihisztor aki tudatosan kezdte használni *Gerolamo Cardano* volt. Másodfokú egyenletek vizsgálata közben kezdte a komplex számokat használni 1545 -körül, de még ő is csak vázlatosan fogta fel mibe is botlott. A koncepció viszont hamar elterjedt, *Rafael Bombelli* volt az első aki a komplex számok aritmetikájával kezdett foglalkozni. Közben felfedezték az *algebra alaptételét*, így jelentőségük megnőtt.

Felfedezésük

Az első kapcsolódó említés Alekszandriai Hérón munkáiban tünik fel —hibás képletek részeként.

Az első polihisztor aki tudatosan kezdte használni *Gerolamo Cardano* volt. Másodfokú egyenletek vizsgálata közben kezdte a komplex számokat használni 1545 -körül, de még ő is csak vázlatosan fogta fel mibe is botlott. A koncepció viszont hamar elterjedt, *Rafael Bombelli* volt az első aki a komplex számok aritmetikájával kezdett foglalkozni. Közben felfedezték az *algebra alaptételét*, így jelentőségük megnőtt.

A XIX század lején találták, ki, hogy nagyon jól lehet velük hullámokat leírni. Először a hírközlésben is alkalmazni kezdték, majd a kvantumoknál is előjöttek. Manapság a komplex számok elengedhetetlen részei a modern matematikának.

Definíció

Vegyük a legegyszerűbb másodfokú egyenletet aminek nincs valós megoldása

$$z^2 + 1 = 0 \tag{1}$$

Ennek megoldásai legyenek i az imaginárius (képzeletbeli szám) és $-i$. Ebből következik, hogy $i^2 = (-i)^2 = -1$.

Definíció

Vegyük a legegyszerűbb másodfokú egyenletet aminek nincs valós megoldása

$$z^2 + 1 = 0 \tag{1}$$

Ennek megoldásai legyenek i az imaginárius (képzeletbeli szám) és $-i$. Ebből következik, hogy $i^2 = (-i)^2 = -1$.

Így az összes

$$(z - \alpha)^2 + \beta = 0, \quad \beta > 0 \tag{2}$$

Egyenletnek is van megoldása a

$$z_1 = \alpha + i\sqrt{\beta}, \text{ és a } \quad z_2 = \alpha - i\sqrt{\beta}$$

Definíció II

Sőt, a teljesen általános

$$a \cdot z^2 + b \cdot z + c = 0 \tag{3}$$

egyenlet is a (2) alakba írható.

Definíció II

Sőt, a teljesen általános

$$a \cdot z^2 + b \cdot z + c = 0 \tag{3}$$

egyenlet is a (2) alakba írható.

Így kapjuk a (3) egyenletre a

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

megoldó képletet, arra az esetre is, ha diszkrimináns negatív.

Definíció III

A másodfokú egyenleteknek a megoldása mindig

$$z = \underbrace{a}_{\text{valós}} + \underbrace{bi}_{\text{képzetes}}$$

alakba írható. A képzetes és valós rész alkotják a komplex számot. Ezt hívjuk a komplex szám algebrai alakjának.

A komplex számok $\mathbb{C}$ testet alkotnak ami azt jelenti, hogy

$$a \cdot z + b = c$$

egyenlet minden $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C}$ számra megoldható.

Alapműveletek komplex számokkal

A komplex számok körében értelmezett a négy alapművelet.
Legyenek $z_1 = a_1 + ib_1$ illetve $z_2 = a_2 + ib_2$ két tetszőleges komplex szám. Ekkor definíció szerint:

$$
\begin{aligned}
z_1 + z_2 = a_1 + ib_1 + a_2 + ib_2 \quad &= (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \\
z_1 - z_2 = a_1 + ib_1 - a_2 - ib_2 \quad &= (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2)
\end{aligned}
$$

Alapműveletek komplex számokkal

A komplex számok körében értelmezett a négy alapművelet.
Legyenek $z_1 = a_1 + ib_1$ illetve $z_2 = a_2 + ib_2$ két tetszőleges komplex szám. Ekkor definíció szerint:

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 = a_1 + ib_1 + a_2 + ib_2 &= (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2) \\ z_1 - z_2 = a_1 + ib_1 - a_2 - ib_2 &= (a_1 - a_2) + i(b_1 - b_2) \end{aligned}$$

A szorzás elvégzéséhez kell az $i^2 = -1$ összefüggés:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + ib_1) \cdot (a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + i^2 b_1 b_2 + ia_1 b_2 + ia_2 b_1 \\ &= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + a_2 b_1) \end{aligned}$$

Konjugálás

A komplex számokon van egy olyan egyváltozós művelet aminek nincs valós párja: a konjugálás.

Konjugálás

A komplex számokon van egy olyan egyváltozós művelet aminek nincs valós párja: a konjugálás.

A $z = a + bi$ szám konjugáltján a $\bar{z} = a - bi$ komplex számot értjük.

Konjugálás

A komplex számokon van egy olyan egyváltozós művelet aminek nincs valós párja: a konjugálás.

A $z = a + bi$ szám konjugáltján a $\bar{z} = a - bi$ komplex számot értjük.

A konjugálás onnan jön, hogy a megoldó képlet

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

miatt ha egy komplex szám gyöke egy másodfokú egyenletnek akkor a komplex konjugáltja is az.

Konjugálás

A komplex számokon van egy olyan egyváltozós művelet aminek nincs valós párja: a konjugálás.

A $z = a + bi$ szám konjugáltján a $\bar{z} = a - bi$ komplex számot értjük.

A konjugálás onnan jön, hogy a megoldó képlet

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

miatt ha egy komplex szám gyöke egy másodfokú egyenletnek akkor a komplex konjugáltja is az.

A komplex számból és konjugáltjából kifejezhető a komplex szám valós és képzetes része, hiszen $\frac{z+\bar{z}}{2} = a$ és $\frac{z-\bar{z}}{2i} = b$

Alapműveletek komplex számokkal - Osztás

Az osztás elvégzése algebrai alakban kicsit nehézkes, de ha a nevező komplex konjugáltjával bővítek akkor algebrai alakot kapok.

$$\frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} \cdot \frac{a_2 - ib_2}{a_2 - ib_2} = \frac{a_1 a_2 - i^2 b_1 b_2 - i a_1 b_2 + i b_1 a_2}{{a_2}^2 - (ib_2)^2} =$$

$$\frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + i(b_1 a_2 - a_1 b_2)}{{a_2}^2 + {b_2}^2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{{a_2}^2 + {b_2}^2} + i \frac{b_1 a_2 - a_1 b_2}{{a_2}^2 + {b_2}^2}$$

Példák

Példa: Számítsuk ki a $3+6i$ és a $4+7i$ számok szorzatát!

$$(3+6i)(4+7i) = 12+42i^2+24i+21i = -30+45i$$

Példák

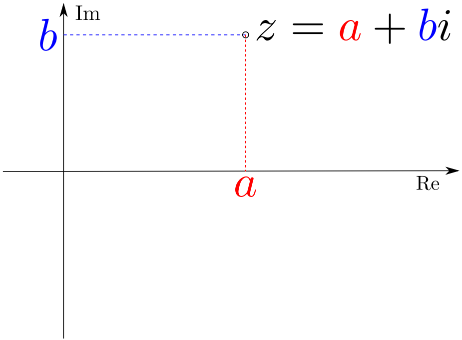
Példa: Számítsuk ki a $3+6i$ és a $4+7i$ számok szorzatát!

$$(3+6i)(4+7i) = 12+42i^2+24i+21i = -30+45i$$

Példa 2: Számítsuk ki a $2+3i$ és a $4-2i$ számok hányadosát!

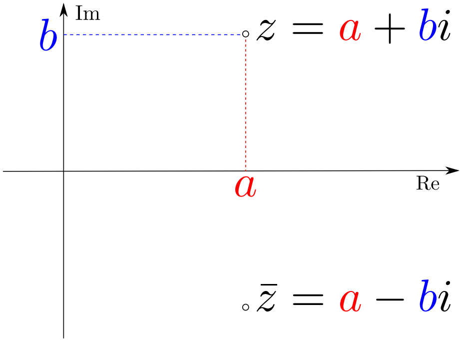
$$\frac{2+3i}{4-2i} = \frac{2+3i}{4-2i}\cdot\frac{4+2i}{4+2i} = \frac{8-6+i(4+12)}{4^2+2^2} = \frac{2+16i}{20} = \frac{1}{10}+i\frac{4}{5}$$

A komplex sík



A komplex számok ábrázolhatók a komplex síkon. Ahol az egyik tengely a valós (Re), a másik tengely a képzetes (Im) számokat ábrázolja.

A komplex sík II

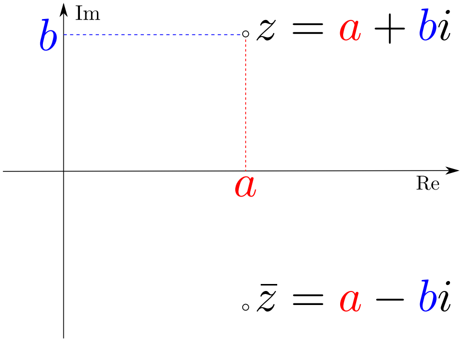


A konjugált a komplex szám tükörképe a valós tengelyre. A

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2$$

a Pitagorasz tétel miatt a z távolságnégyzete az origótól.

A komplex sík II

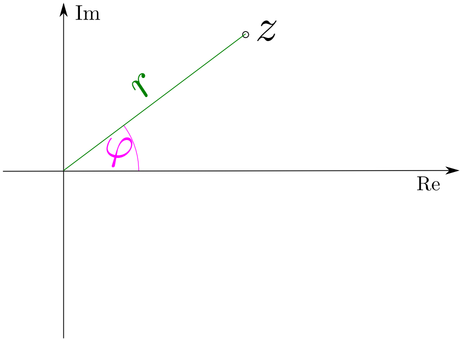


A konjugált a komplex szám tükörképe a valós tengelyre. A

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2$$

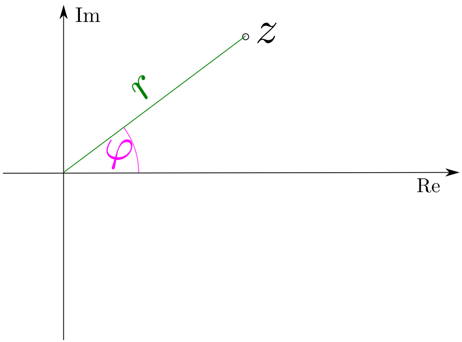
a Pitagorasz tétel miatt a z távolságnégyzete az origótól.

Komplex szám trigonometrikus alakja



Egy komplex számot nemcsak a valós és képzetes részével adhatunk meg hanem megadhatjuk ehelyett az origótól vett távolságát $|z|$-t amit a polár koordináta rendszer jelölései miatt szoktuk r-nek is jelölni, és a valós tengely pozitív felével bezárt szögével, aminek jele: φ, $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Komplex szám trigonometrikus alakja II



Ezek segítségével használhatjuk az ún. trigonometrikus alakot is

$$z = r[\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)]$$

mivel $\cos\varphi = \frac{a}{r}$ illetve $\sin\varphi = \frac{b}{r}$ definíció szerint.

Alapműveletek trigonometrikus alakban - Szorzás

A szorzás és osztás művelete sokkal egyszerűbben elvégezhető a trigonometrikus alakban. Legyenek $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ illetve $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ két tetszőleges komplex szám. Ekkor

Alapműveletek trigonometrikus alakban - Szorzás

A szorzás és osztás művelete sokkal egyszerűbben elvégezhető a trigonometrikus alakban. Legyenek $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ illetve $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ két tetszőleges komplex szám. Ekkor

$$z_1 z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$

$$= r_1 r_2[\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)] =$$

$$= r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Alapműveletek trigonometrikus alakban - Szorzás

A szorzás és osztás művelete sokkal egyszerűbben elvégezhető a trigonometrikus alakban. Legyenek $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ illetve $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ két tetszőleges komplex szám. Ekkor

$$z_1 z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) =$$

$$= r_1 r_2[\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2)] =$$

$$= r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Tehát egy komplex számmal való szorzás az abszolult értékkel való „nyújtást” és a szöggel való forgatást jelent.

Alapműveletek trigonometrikus alakban - Osztás

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\,\frac{\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2}\,\frac{\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2}{\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2} =$$

Alapműveletek trigonometrikus alakban - Osztás

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\frac{\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2}\frac{\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2}{\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2} =$$

$$\frac{r_1}{r_2}\frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2} =$$

Alapműveletek trigonometrikus alakban - Osztás

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\frac{\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1}{\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2}\frac{\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2}{\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2} =$$

$$\frac{r_1}{r_2}\frac{\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)}{\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2} =$$

$$\frac{r_1}{r_2}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

Példa

Számítsuk ki a $2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ és a $4\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$ számok szorzatát!

Példa

Számítsuk ki a $2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ és a $4\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)$ számok szorzatát!

$$2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)4\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)=$$

$$8\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=8i$$

Alapműveletek komplex számokkal - Hatványozás

A magas kitevőjű hatványozást nem érdemes $a + ib$ alakban végezni, ugyanis míg a

$$z^n = (a + ib)^n$$

kifejezést magas hatványra csak a binomiális tétellel bontható ki, addig

Alapműveletek komplex számokkal - Hatványozás

A magas kitevőjű hatványozást nem érdemes $a+ib$ alakban végezni, ugyanis míg a

$$z^n = (a+ib)^n$$

kifejezést magas hatványra csak a binomiális tétellel bontható ki, addig

$$z^n = r^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$$

igen könnyen számolható.

Példa

Számítsuk ki az $1 - i$ szám 2019-ik hatványát, a végeredményt algebrai alakban adjuk meg!

Példa

Számítsuk ki az $1 - i$ szám 2019-ik hatványát, a végeredményt algebrai alakban adjuk meg!

Írjuk át trigonometrikus alakra a számot.

$$|z| = r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \quad \text{és} \quad \varphi = \frac{7\pi}{4}$$

Példa

Számítsuk ki az $1 - i$ szám 2019-ik hatványát, a végeredményt algebrai alakban adjuk meg!

Írjuk át trigonometrikus alakra a számot.

$$|z| = r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \quad \text{és} \quad \varphi = \frac{7\pi}{4}$$

Ezután

$$z^{2019} = \sqrt{2}^{2019}\left(\cos\left(\frac{14133\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{14133\pi}{4}\right)\right) =$$

$$2^{1009}\sqrt{2}(\cos(\frac{14128}{8}2\pi + \frac{5\pi}{4}) + i\sin(\frac{14128}{8}2\pi + \frac{5\pi}{4})$$

$$= 2^{1009}\sqrt{2}(\cos(\frac{5\pi}{4}) + i\sin(\frac{5\pi}{4})) = -2^{1009} - 2^{1009}i$$

Alapműveletek komplex számokkal - Gyökvonás

A gyökvonás pedig nem is végezhető el a trigonometrikus alak nélkül. Legyen $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$. Ekkor a szám (komplex értelemben vett) n-edik gyökei:

Alapműveletek komplex számokkal - Gyökvonás

A gyökvonás pedig nem is végezhető el a trigonometrikus alak nélkül. Legyen $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$. Ekkor a szám (komplex értelemben vett) n-edik gyökei:

$$\sqrt[n]{z} = \begin{cases} \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n}\right)\right) \\ \\ \\ \\ \end{cases}$$

Alapműveletek komplex számokkal - Gyökvonás

A gyökvonás pedig nem is végezhető el a trigonometrikus alak nélkül. Legyen $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$. Ekkor a szám (komplex értelemben vett) n-edik gyökei:

$$\sqrt[n]{z} = \begin{cases} \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n}\right)\right) \\ \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right)\right) \\ \\ \\ \\ \end{cases}$$

Alapműveletek komplex számokkal - Gyökvonás

A gyökvonás pedig nem is végezhető el a trigonometrikus alak nélkül. Legyen $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$. Ekkor a szám (komplex értelemben vett) n-edik gyökei:

$$\sqrt[n]{z} = \begin{cases} \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n}\right)\right) \\ \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right)\right) \\ \vdots \\ \\ \\ \end{cases}$$

Alapműveletek komplex számokkal - Gyökvonás

A gyökvonás pedig nem is végezhető el a trigonometrikus alak nélkül. Legyen $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$. Ekkor a szám (komplex értelemben vett) n-edik gyökei:

$$\sqrt[n]{z} = \begin{cases} \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n}\right)\right) \\ \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right)\right) \\ \vdots \\ \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right) \\ \\ \end{cases}$$

Alapműveletek komplex számokkal - Gyökvonás

A gyökvonás pedig nem is végezhető el a trigonometrikus alak nélkül. Legyen $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$. Ekkor a szám (komplex értelemben vett) n-edik gyökei:

$$\sqrt[n]{z} = \begin{cases} \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n}\right)\right) \\ \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right)\right) \\ \vdots \\ \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right) \\ \vdots \end{cases}$$

Alapműveletek komplex számokkal - Gyökvonás

A gyökvonás pedig nem is végezhető el a trigonometrikus alak nélkül. Legyen $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$. Ekkor a szám (komplex értelemben vett) n-edik gyökei:

$$\sqrt[n]{z} = \begin{cases} \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n}\right)\right) \\ \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right)\right) \\ \vdots \\ \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right) \\ \vdots \\ \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right)\right) \end{cases}$$

Alapműveletek komplex számokkal - Gyökvonás

A gyökvonás pedig nem is végezhető el a trigonometrikus alak nélkül. Legyen $z = r(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$. Ekkor a szám (komplex értelemben vett) n-edik gyökei:

$$\sqrt[n]{z} = \begin{cases} \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n}\right)\right) \\ \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}\right)\right) \\ \vdots \\ \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right) \\ \vdots \\ \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right)\right) \end{cases}$$

Tehát minden komplex számnak n darab n-edik gyöke van, melyek egy orgió középpontú szabályos n szöget alkotnak.

Példa

Számítsuk ki az $1 - i$ szám harmadik gyökeit!

Példa

Számítsuk ki az $1 - i$ szám harmadik gyökeit!

Már tudjuk, hogy a trigonometrikus alak $\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)$.

Példa

Számítsuk ki az $1 - i$ szám harmadik gyökeit!

Már tudjuk, hogy a trigonometrikus alak $\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)$.

Innen:

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right),$$

ahol $k = 0,1,2$, azaz a három gyök:

Példa

Számítsuk ki az $1 - i$ szám harmadik gyökeit!

Már tudjuk, hogy a trigonometrikus alak
$\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)$.

Innen:

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}\right)\right),$$

ahol $k = 0,1,2$, azaz a három gyök:

- k=0-re: $\sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\right)$
- k=1-re: $\sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{15\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{15\pi}{12}\right)\right)$
- k=2-re: $\sqrt[6]{2}\left(\cos\left(\frac{23\pi}{12}\right) + i\sin\left(\frac{23\pi}{12}\right)\right)$

Példa a másodfokú egyenlet megoldására

Oldjuk meg az $x^2 + 2x + 2 = 0$ egyenletet a komplex számok körében!

Példa a másodfokú egyenlet megoldására

Oldjuk meg az $x^2 + 2x + 2 = 0$ egyenletet a komplex számok körében!

$$z_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = -1 \pm \sqrt{-1}$$

Példa a másodfokú egyenlet megoldására

Oldjuk meg az $x^2 + 2x + 2 = 0$ egyenletet a komplex számok körében!

$$z_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = -1 \pm \sqrt{-1}$$

Azaz a gyökök $x_1 = -1 + i$ és $x_2 = -1 - i$.

Példa a másodfokú egyenlet megoldására

Oldjuk meg az $x^2 + 2x + 2 = 0$ egyenletet a komplex számok körében!

$$z_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = -1 \pm \sqrt{-1}$$

Azaz a gyökök $x_1 = -1 + i$ és $x_2 = -1 - i$.

A gyökök ismeretében a gyöktényező alak:
$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.
Így most a gyöktényezős alak: $(x + 1 - i)(x + 1 + i)$.

Példa a másodfokú egyenlet megoldására

Oldjuk meg az $x^2 + 2x + 2 = 0$ egyenletet a komplex számok körében!

$$z_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = -1 \pm \sqrt{-1}$$

Azaz a gyökök $x_1 = -1 + i$ és $x_2 = -1 - i$.

A gyökök ismeretében a gyöktényező alak:
$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$.
Így most a gyöktényezős alak: $(x + 1 - i)(x + 1 + i)$.

És valóban a másodfokú kifejezés egy felbontását kapjuk, hiszen
$(x+1-i)(x+1+i) = x^2+x(1+i+1-i)+(1-i)(1+i) = x^2+2x+2$.

Komplex számokra vonatkozó egyenletek

Példa: Oldjuk meg a $z^3 = 8$ egyenletet!

Komplex számokra vonatkozó egyenletek

Példa: Oldjuk meg a $z^3 = 8$ egyenletet!

A valós számok körében ennek az egyenletnek csak egy megoldása volt. Komplex számok körében viszont három, ugyanis $\sqrt[3]{8}$-nak 3 gyöke van.

Komplex számokra vonatkozó egyenletek

Példa: Oldjuk meg a $z^3 = 8$ egyenletet!

A valós számok körében ennek az egyenletnek csak egy megoldása volt. Komplex számok körében viszont három, ugyanis $\sqrt[3]{8}$-nak 3 gyöke van.

Ezek meghatározásához írjuk át 8-at trigonometrikus alakba: $8 = 8(\cos(0) + i\sin(0))$.

Komplex számokra vonatkozó egyenletek

Példa: Oldjuk meg a $z^3 = 8$ egyenletet!

A valós számok körében ennek az egyenletnek csak egy megoldása volt. Komplex számok körében viszont három, ugyanis $\sqrt[3]{8}$-nak 3 gyöke van.

Ezek meghatározásához írjuk át 8-at trigonometrikus alakba: $8 = 8(\cos(0) + i\sin(0))$.

Innen a köbgyökök:

$$\sqrt[3]{8} = 2\left(\cos\left(0 + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(0 + \frac{2k\pi}{3}\right)\right),$$

ahol $k = 0,1,2$.

Komplex számokra vonatkozó egyenletek

Példa: Oldjuk meg a $z^3 = 8$ egyenletet!

A valós számok körében ennek az egyenletnek csak egy megoldása volt. Komplex számok körében viszont három, ugyanis $\sqrt[3]{8}$-nak 3 gyöke van.

Ezek meghatározásához írjuk át 8-at trigonometrikus alakba: $8 = 8(\cos(0) + i\sin(0))$.

Innen a köbgyökök:

$$\sqrt[3]{8} = 2\left(\cos\left(0 + \frac{2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(0 + \frac{2k\pi}{3}\right)\right),$$

ahol $k = 0,1,2$.

Innen a megoldások: $z_1 = 2$

$z_2 = 2\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right) = -1 + i\sqrt{3}$

$z_3 = 2\left(\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)\right) = -1 - i\sqrt{3}$.

Komplex számokra vonatkozó egyenletek

Példa 2: Oldjuk meg a $z + |z| = 3 + i$ egyenletet!

Komplex számokra vonatkozó egyenletek

Példa 2: Oldjuk meg a $z + |z| = 3 + i$ egyenletet!

Két komplex szám pontosan akkor egyenlő ha külön-külön a valós és a képzetesrészük egyenlő. Az egyenlet megoldásához tehát írjuk ki a z szám algebrai alakját.

Komplex számokra vonatkozó egyenletek

Példa 2: Oldjuk meg a $z + |z| = 3 + i$ egyenletet!

Két komplex szám pontosan akkor egyenlő ha külön-külön a valós és a képzetesrészük egyenlő. Az egyenlet megoldásához tehát írjuk ki a z szám algebrai alakját.

$$a + ib + \sqrt{a^2 + b^2} = 3 + i$$

Komplex számokra vonatkozó egyenletek

Példa 2: Oldjuk meg a $z + |z| = 3 + i$ egyenletet!

Két komplex szám pontosan akkor egyenlő ha külön-külön a valós és a képzetesrészük egyenlő. Az egyenlet megoldásához tehát írjuk ki a z szám algebrai alakját.

$$a + ib + \sqrt{a^2 + b^2} = 3 + i$$

Innen a valós részekre vonatkozó egyenlet: $a + \sqrt{a^2 + b^2} = 3$,

Komplex számokra vonatkozó egyenletek

Példa 2: Oldjuk meg a $z + |z| = 3 + i$ egyenletet!

Két komplex szám pontosan akkor egyenlő ha külön-külön a valós és a képzetesrészük egyenlő. Az egyenlet megoldásához tehát írjuk ki a z szám algebrai alakját.

$$a + ib + \sqrt{a^2 + b^2} = 3 + i$$

Innen a valós részekre vonatkozó egyenlet: $a + \sqrt{a^2 + b^2} = 3$, a képzetes részre vonatkozó egyenlet $b = 1$. Ezt visszaírva a valós részre vonatkozó egyenletbe: $a + \sqrt{1 + a^2} = 3$.

Komplex számokra vonatkozó egyenletek

Példa 2: Oldjuk meg a $z + |z| = 3 + i$ egyenletet!

Két komplex szám pontosan akkor egyenlő ha külön-külön a valós és a képzetesrészük egyenlő. Az egyenlet megoldásához tehát írjuk ki a z szám algebrai alakját.

$$a + ib + \sqrt{a^2 + b^2} = 3 + i$$

Innen a valós részekre vonatkozó egyenlet: $a + \sqrt{a^2 + b^2} = 3$, a képzetes részre vonatkozó egyenlet $b = 1$. Ezt visszaírva a valós részre vonatkozó egyenletbe: $a + \sqrt{1 + a^2} = 3$.

Innen:

$$\sqrt{1 + a^2} = 3 - a$$

A megoldáshoz nincs más választásunk, mint mindkét oldalt négyzetre emelni.

Példa - folyt.

Vigyázunk, ekkor keletkezhet hamis gyök, ezért a kapott gyököket ellenőriznünk kell!

$$\sqrt{1+a^2} = 3-a$$

$$1+a^2 = 9-6a+a^2$$

$$6a = 8$$

Példa - folyt.

Vigyázunk, ekkor keletkezhet hamis gyök, ezért a kapott gyököket ellenőriznünk kell!

$$\sqrt{1+a^2} = 3-a$$
$$1+a^2 = 9-6a+a^2$$
$$6a = 8$$

Ellenőrizzük a $a = \frac{4}{3}$ gyököt!

$$\frac{4}{3} + \sqrt{1+\frac{16}{9}} = \frac{4}{3} + \frac{5}{3} = 3,$$

Példa - folyt.

Vigyázunk, ekkor keletkezhet hamis gyök, ezért a kapott gyököket ellenőriznünk kell!

$$\sqrt{1+a^2} = 3-a$$
$$1+a^2 = 9-6a+a^2$$
$$6a = 8$$

Ellenőrizzük a $a = \frac{4}{3}$ gyököt!

$$\frac{4}{3} + \sqrt{1+\frac{16}{9}} = \frac{4}{3} + \frac{5}{3} = 3,$$

azaz nem hamis gyök a $\frac{4}{3}$. Innen az eredeti egyenlet megoldása:

$$\frac{4}{3} + i$$

.