Az Integrál

dr. Farkas Lóránt Ernő

2019/2020 ősz

Háttér

Mint ahogy a függvény érintője, ugyanúgy a függvény alatti terület is fontos fizikai jelentőséggel bír:

Háttér

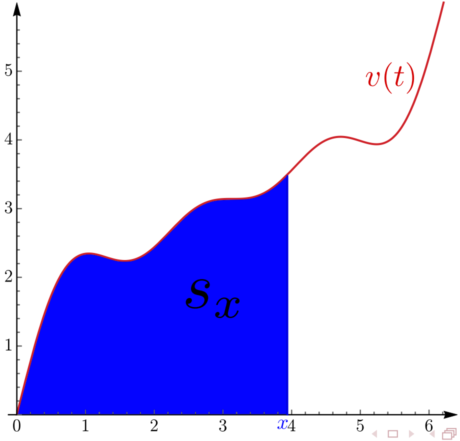
Mint ahogy a függvény érintője, ugyanúgy a függvény alatti terület is fontos fizikai jelentőséggel bír:

Például: Ha a sebességet ábrázolom a grafikonnal, akkor a grafikon alatt lévő terület az út.

Háttér

Mint ahogy a függvény érintője, ugyanúgy a függvény alatti terület is fontos fizikai jelentőséggel bír:

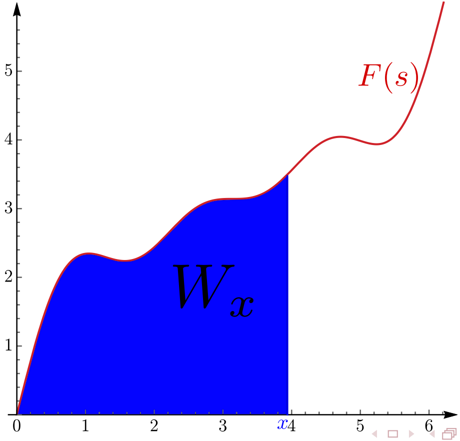
Például: Ha a sebességet ábrázolom a grafikonnal, akkor a grafikon alatt lévő terület az út.



Háttér

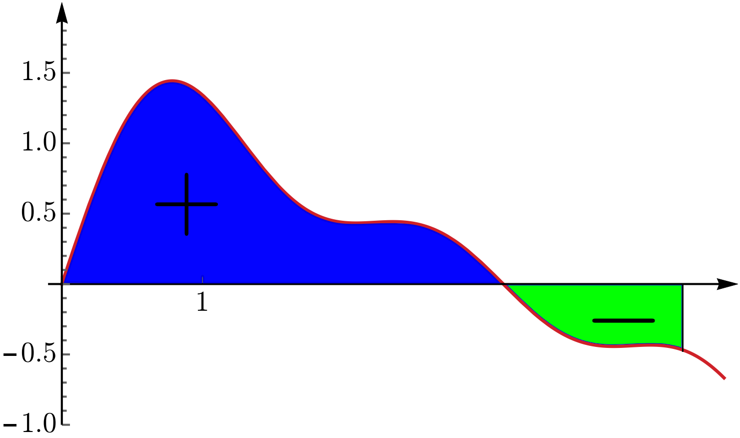
Mint ahogy a függvény érintője, ugyanúgy a függvény alatti terület is fontos fizikai jelentőséggel bír:

Például: Ha a erőt ábrázolom a grafikonnal, akkor a grafikon alatt lévő terület az munka.



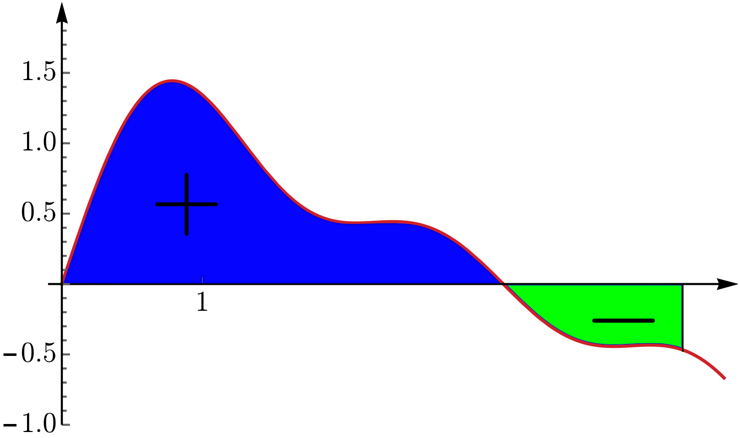
Előjeles terület

Egy kis csavar: Ha a függvényem negatív (például a sebességem negatív, tehát visszafele megyek), akkor szeretném hogy a terület negatív legyen (hiszen visszafele teszem meg az utat).



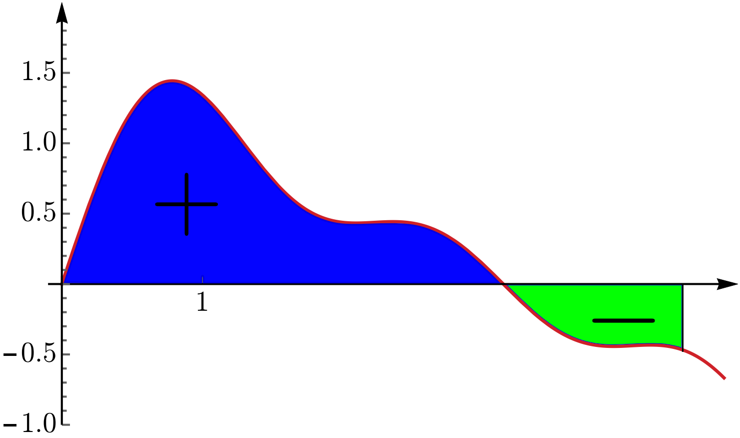
Előjeles terület

Egy kis csavar: Ha a függvényem negatív (például a sebességem negatív, tehát visszafele megyek), akkor szeretném hogy a terület negatív legyen (hiszen visszafele teszem meg az utat).



Előjeles terület

Egy kis csavar: Ha a függvényem negatív (például a sebességem negatív, tehát visszafele megyek), akkor szeretném hogy a terület negatív legyen (hiszen visszafele teszem meg az utat).



Részletek

Az ördög a részletekben van:

Részletek

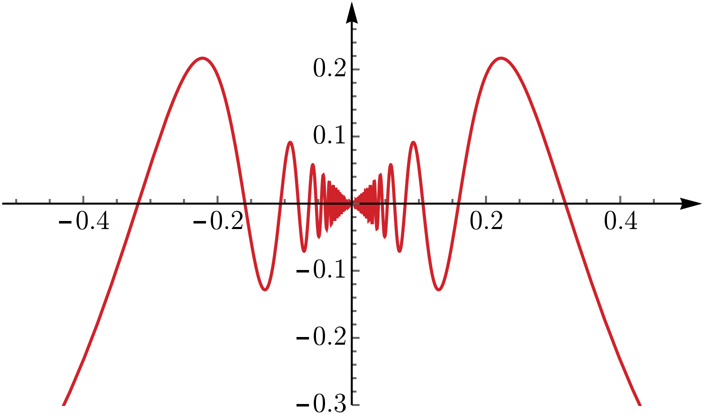
Az ördög a részletekben van:

Például: Van-e, és mi az integrálja az alábbi függvényeknek?

Részletek

Az ördög a részletekben van:

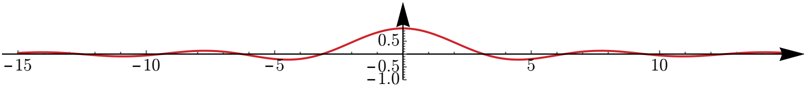
Például: Van-e, és mi az integrálja az alábbi függvényeknek?



Részletek

Az ördög a részletekben van:

Például: Van-e, és mi az integrálja az alábbi függvényeknek?



Részletek

Az ördög a részletekben van:

Például: Van-e, és mi az integrálja az alábbi függvényeknek?

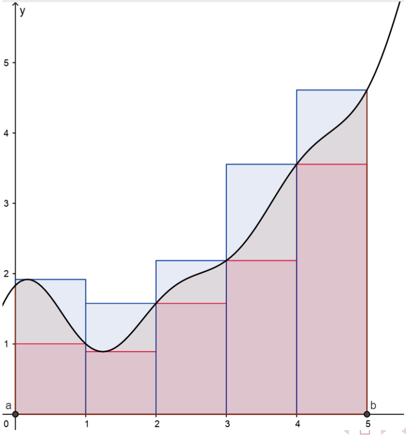
$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0, \text{ha } x \in \mathbb{Q}* \end{cases}$$

Riemann Integrál, nagykép

Először is feltesszük, hogy f korlátos $[a,b]$ kompakt intervallumnon.

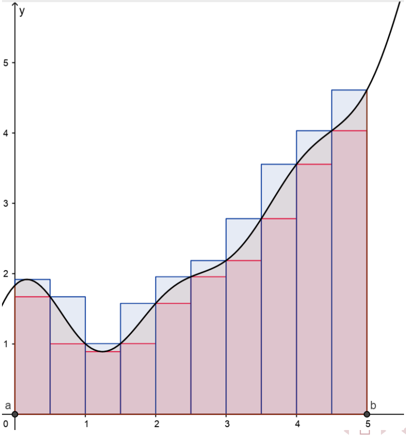
Riemann Integrál, nagykép

Először is feltesszük, hogy f korlátos $[a,b]$ kompakt intervallumnon. Felosztjuk az értékkészletet, majd a függvény alá és fölé téglalapokat rajzolunk. A felosztást finomítva ha közös határértéket kapunk akkor az az integrál.



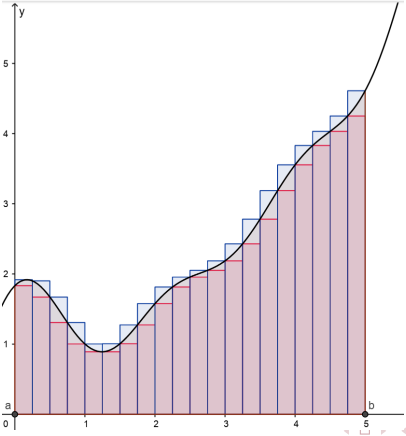
Riemann Integrál, nagykép

Először is feltesszük, hogy f korlátos $[a,b]$ kompakt intervallumnon.
Felosztjuk az értékkészletet, majd a függvény alá és fölé téglalapokat rajzolunk. A felosztást finomítva ha közös határértéket kapunk akkor az az integrál.



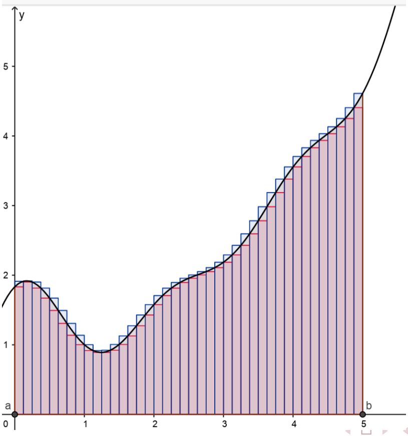
Riemann Integrál, nagykép

Először is feltesszük, hogy f korlátos $[a,b]$ kompakt intervallumnon. Felosztjuk az értékkészletet, majd a függvény alá és fölé téglalapokat rajzolunk. A felosztást finomítva ha közös határértéket kapunk akkor az az integrál.



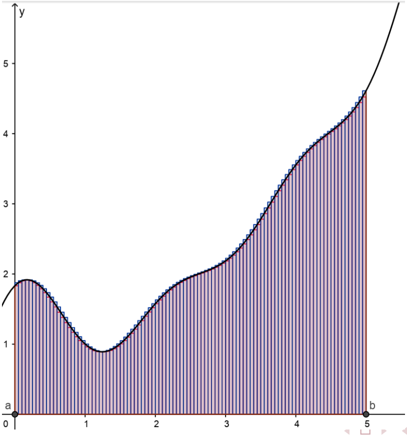
Riemann Integrál, nagykép

Először is feltesszük, hogy f korlátos $[a,b]$ kompakt intervallumnon.
Felosztjuk az értékkészletet, majd a függvény alá és fölé téglalapokat rajzolunk. A felosztást finomítva ha közös határértéket kapunk akkor az az integrál.



Riemann Integrál, nagykép

Először is feltesszük, hogy f korlátos $[a,b]$ kompakt intervallumnon. Felosztjuk az értékkészletet, majd a függvény alá és fölé téglalapokat rajzolunk. A felosztást finomítva ha közös határértéket kapunk akkor az az integrál.



Riemann Integrál, definíciók

Definíció

Az $[a,b]$ intervallum egy felosztása egy $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ pontsorozat. Ebből a k-adik részintervallum $I_k = [x_{k-1}, x_k]$. Ennek hossza $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Ezen felosztás finomsága: $\Delta F = \max_k \Delta x_k$. Egy felosztássorozat F_n minden határon túl finomodó ha $\lim_{n\to n} \Delta F_n = 0$

Riemann Integrál, definíciók

Definíció

Az $[a,b]$ intervallum egy felosztása egy $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ pontsorozat. Ebből a k-adik részintervallum $I_k = [x_{k-1}, x_k]$. Ennek hossza $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Ezen felosztás finomsága: $\Delta F = \max_k \Delta x_k$. Egy felosztássorozat F_n minden határon túl finomodó ha $\lim_{n\to n} \Delta F_n = 0$

Definíció

Egy $[a,b]$ intervallum egy F felosztáshoz és egy $f(x)$ folytonos függvényhez tartozó alsó közelítő összeg s_F:

$$s_F = \sum_k m_k \Delta x_k, \quad m_k = \min_{x \in I_k} f(x)$$

Riemann Integrál, definíciók

Definíció

Az $[a,b]$ *intervallum egy felosztása egy* $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ *pontsorozat. Ebből a k-adik részintervallum* $I_k = [x_{k-1}, x_k]$. *Ennek hossza* $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. *Ezen felosztás finomsága:* $\Delta F = \max_k \Delta x_k$. *Egy felosztássorozat* F_n *minden határon túl finomodó ha* $\lim_{n\to n} \Delta F_n = 0$

Definíció

Egy $[a,b]$ *intervallum egy* F *felosztáshoz és egy* $f(x)$ *folytonos függvényhez tartozó felső közelítő összeg* S_F:

$$S_F = \sum_k M_k \Delta x_k, \quad M_k = \max_{x \in I_k} f(x)$$

A felosztássorozat tulajdonságai

Az triviális, hogy

$$s_F \leq S_F \tag{1}$$

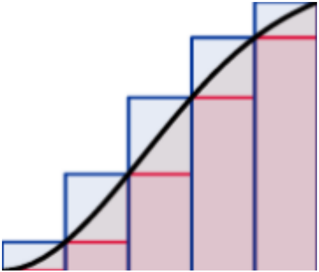
A felosztássorozat tulajdonságai

Az triviális, hogy

$$s_F \leq S_F \tag{1}$$

Ugyanakkor, ha F^* olyan felosztás amit F-ből kapok úgy, hogy plusz pontokat veszek hozzá akkor

$$s_F \leq s_{F^*}, \quad S_F \geq S_{F^*} \tag{2}$$



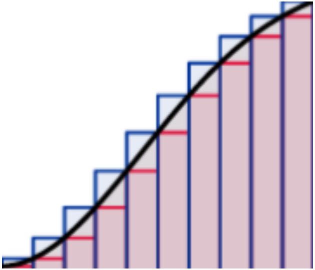
A felosztássorozat tulajdonságai

Az triviális, hogy

$$s_F \leq S_F \tag{1}$$

Ugyanakkor, ha F^* olyan felosztás amit F-ből kapok úgy, hogy plusz pontokat veszek hozzá akkor

$$s_F \leq s_{F^*}, \quad S_F \geq S_{F^*} \tag{2}$$



A felosztássorozat tulajdonságai II

Ha F_1 és F_2 két felosztás akkor

$$s_{F_1} \leq S_{F_2} \tag{3}$$

Mivel $s_{F_1} \leq_{(2)} s_{F_1 \cup F_2} \leq_{(1)} S_{F_1 \cup F_2} \leq_{(2)} S_{F_2}$.

A felosztássorozat tulajdonságai II

Ha F_1 és F_2 két felosztás akkor

$$s_{F_1} \leq S_{F_2} \tag{3}$$

Mivel $s_{F_1} \leq_{(2)} s_{F_1 \cup F_2} \leq_{(1)} S_{F_1 \cup F_2} \leq_{(2)} S_{F_2}$.

Legyen $h = \sup\limits_F \{s_F\}$, $H = \inf\limits_F \{S_F\}$.

A felosztássorozat tulajdonságai II

Ha F_1 és F_2 két felosztás akkor

$$s_{F_1} \leq S_{F_2} \tag{3}$$

Mivel $s_{F_1} \leq_{(2)} s_{F_1 \cup F_2} \leq_{(1)} S_{F_1 \cup F_2} \leq_{(2)} S_{F_2}$.
Legyen $h = \sup\limits_F \{s_F\}$, $H = \inf\limits_F \{S_F\}$.
Mivel $s_F \leq S_F$ minden F-re ezért $h \leq H$

A felosztássorozat tulajdonságai II

Ha F_1 és F_2 két felosztás akkor

$$s_{F_1} \leq S_{F_2} \tag{3}$$

Mivel $s_{F_1} \leq_{(2)} s_{F_1 \cup F_2} \leq_{(1)} S_{F_1 \cup F_2} \leq_{(2)} S_{F_2}$.
Legyen $h = \sup_F \{s_F\}$, $H = \inf_F \{S_F\}$.
Mivel $s_F \leq S_F$ minden F-re ezért $h \leq H$
Bizonyítható: Ha F_n egy minden határon túl finomodó felosztássorozat akkor

$$\lim_{n\to\infty} s_{F_n} = h, \quad \lim_{n\to\infty} S_{F_n} = H$$

Integrálhatóság

Definíció

Azt mondjuk, hogy f Riemann integrálható $[a,b]$-n ha $h = H$, vagyis az alsó közelítő összegek szuprenuma és a felső közelítő összegek infinuma megegyezik.

Integrálhatóság

Definíció

Azt mondjuk, hogy f Riemann integrálható $[a,b]$-n ha $h = H$, vagyis az alsó közelítő összegek szuprenuma és a felső közelítő összegek infinuma megegyezik.

Másképp megfogalmazva: f integrálható, ha egy minden határon túl finomodó felosztássorozatra F_n-re:

$$\lim_{n\to\infty} s_{F_n} = \lim_{n\to\infty} S_{F_n} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$$

Integrálhatóság

Definíció

Azt mondjuk, hogy f Riemann integrálható $[a,b]$-n ha $h = H$, vagyis az alsó közelítő összegek szuprenuma és a felső közelítő összegek infinuma megegyezik.

Másképp megfogalmazva: f integrálható, ha egy minden határon túl finomodó felosztássorozatra F_n-re:

$$\lim_{n\to\infty} s_{F_n} = \lim_{n\to\infty} S_{F_n} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$$

Jelölés: Ha f integrálható $[a,b]$-n akkor $f \in R_{[a,b]}$

Példák

Például: Ha $f(x) \equiv c$ $[a,b]$-n akkor

$$s_F = S_F = c(b-a)$$

minden F felosztásra.

Példák

Például: Ha $f(x) \equiv c$ $[a,b]$-n akkor

$$s_F = S_F = c(b-a)$$

minden F felosztásra.

Például: Ha

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{, ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{, ha } x \in \mathbb{Q}^* \end{cases}$$

Akkor bárhogy veszek egy F felosztást, az intervallumokban lesz racionlális és irracionális szám is, ezért

$$s_F = 0, \quad S_F = 1.$$

Így ez a függvény nem Riemann integrálható.

Integrálhatóság matematikai feltétele

Definíció

Az F felosztáshoz tartozó oszcillációs összeg:

$$0 \leq O_F = S_F - s_F = \sum_{k=1}^{n} M_k - m_k \Delta x_k$$

Integrálhatóság matematikai feltétele

Definíció

Az F felosztáshoz tartozó oszcillációs összeg:

$$0 \leq O_F = S_F - s_F = \sum_{k=1}^{n} M_k - m_k \Delta x_k$$

Tehát

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \,\exists \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists F \text{ melyre } O_F \leq \varepsilon$$

Milyen függvények integrálhatók?

Tétel

Ha f monoton és korlátos akkor Integrálható

Milyen függvények integrálhatók?

Tétel

Ha f monoton és korlátos akkor Integrálható

Bizonyítás: Legyen f monoton növekvő ekkor

$$\Delta x_k = \frac{b-a}{b} \text{ (Egyenletesen osszuk fel az intervallumot)}$$

$$O_F = \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\Delta x_k = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) - f(x_{k-1}) =$$

$$= \frac{b-a}{n}(f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + f(x_3) - f(x_2) + \cdots +$$

$$+ f(x_n) - f(x_{n-1})) = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a))$$

Ez viszont kisebb mint ε ha $n \geq \frac{(b-a)(f(b)-f(a))}{\varepsilon}$

Integrálható függvények, integrál közelítő összeg

Megmutatható:

1. Ha f folytonos akkor integrálható.
2. Az integrál értéke nem változik, ha a függvényt véges sok pontban megváltoztatom.

Integrálható függvények, integrál közelítő összeg

Megmutatható:

1. Ha f folytonos akkor integrálható.
2. Az integrál értéke nem változik, ha a függvényt véges sok pontban megváltoztatom.

Sőt, f integrálható, ha véges sok monoton vagy folytonos függvényből képzett parciális függvény.

Integrálható függvények, integrál közelítő összeg

Megmutatható:

1. Ha f folytonos akkor integrálható.
2. Az integrál értéke nem változik, ha a függvényt véges sok pontban megváltoztatom.

Sőt, f integrálható, ha véges sok monoton vagy folytonos függvényből képzett parciális függvény.

Például: ha

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & \text{ha } x \in [a,x_1) \\ f_2(x), & \text{ha } x \in [x_1,x_2] \\ f_3(x), & \text{ha } x \in (x_2,x_3) \\ & \vdots \\ f_l(x), & \text{ha } x \in (x_{l-1},x_l = b] \end{cases}$$

és f_i-k monotonok, vagy folytonosak, akkor $f(x)$ is integrálható.

Integrál közelítő összeg

Definíció

Az f függvény F felosztáshoz tartozó integrálközelítő összege:

$$\sigma_F = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)(x_k - x_{k-1})$$

ahol $c_k \in I_k = [x_{k-1}, x_k]$ reprezentáns pont, $f(c_k)$ a reprezentáns függvényérték.

Integrál közelítő összeg

Definíció

Az f függvény F felosztáshoz tartozó integrálközelítő összege:

$$\sigma_F = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)(x_k - x_{k-1})$$

ahol $c_k \in I_k = [x_{k-1}, x_k]$ reprezentáns pont, $f(c_k)$ a reprezentáns függvényérték.

Nyilvánvaló: $s_F \leq \sigma_F \leq S_F$, ezért:
Ha $f \in R_{[a,b]}$ $\Rightarrow$ Rendőr elv. $\Rightarrow$ az összes F_n minden határon túl finomodó felosztássorozatra:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_{F_n} \to \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Newton-Leibniz formula

Az integrál gyakorlati kiszámításához ad segítséget az alábbi formula. Ehhez, kell először egy definíció:

Newton-Leibniz formula

Az integrál gyakorlati kiszámításához ad segítséget az alábbi formula. Ehhez, kell először egy definíció:

Definíció

Az $f(x)$ függvény primitív függvénye $F(x)$, ha $F'(x) = f(x)$.

Newton-Leibniz formula

Az integrál gyakorlati kiszámításához ad segítséget az alábbi formula. Ehhez, kell először egy definíció:

Definíció

Az $f(x)$ függvény primitív függvénye $F(x)$, ha $F'(x) = f(x)$.

Példa: $x^2 + 1$ primitív függvénye a $\frac{x^3}{3} + x$ és $\frac{x^3}{3} + x + 100$ is.

Tétel (Newton-Leibniz formula)

Legyen $g(x) \in R_{[a,b]}$ és legyen $G(x)$ az $g(x)$ primitív függvénye, ekkor:

$$G(b) - G(a) = \int_a^b g(x)\,\mathrm{dx}$$

Newton-Leibniz formula bizonyítása

Legyen F_n egy minden határon túl finomodó felosztás sorozat. ekkor

$$G(b) - G(a) = G(x_n) - G(x_0) = G(x_n) - G(x_{n-1}) +$$
$$G(x_{n-1}) - G(x_{n-2}) + \cdots + G(x_2) - G(x_1) + G(x_1) - G(x_0) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} G(x_k) - G(x_{k-1}) = (*)$$

Newton-Leibniz formula bizonyítása

Legyen F_n egy minden határon túl finomodó felosztás sorozat. ekkor

$$G(b) - G(a) = G(x_n) - G(x_0) = G(x_n) - G(x_{n-1}) +$$
$$G(x_{n-1}) - G(x_{n-2}) + \cdots + G(x_2) - G(x_1) + G(x_1) - G(x_0) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} G(x_k) - G(x_{k-1}) = (*)$$

Erre alkalmazzuk a Lagrange-féle középértéktételt:

$$\frac{G(x_k) - G(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} = G'(c_k) = g(c_k), \quad c_l \in [x_{k-1}, x_k]$$
$$\Downarrow$$
$$G(x_k) - G(x_{k-1}) = g(c_k)(x_k - x_{k-1})$$

Newton-Leibniz formula bizonyítása II

Ez utóbbit visszaírva (*)-ba:

$$G(b) - G(a) = \sum_{k=1}^{n} G(x_k) - G(x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} g(c_k)\Delta x_k = \sigma_{F_n}$$

Newton-Leibniz formula bizonyítása II

Ez utóbbit visszaírva (*)-ba:

$$G(b) - G(a) = \sum_{k=1}^{n} G(x_k) - G(x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} g(c_k)\Delta x_k = \sigma_{F_n}$$

Mindkét oldal limeszét véve

$$\lim_{n\to\infty} (G(b) - G(a)) = \lim_{n\to\infty} \sigma_{F_n}$$

Newton-Leibniz formula bizonyítása II

Ez utóbbit visszaírva (*)-ba:

$$G(b) - G(a) = \sum_{k=1}^{n} G(x_k) - G(x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} g(c_k)\Delta x_k = \sigma_{F_n}$$

Mindkét oldal limeszét véve

$$G(b) - G(a) = \lim_{n\to\infty} (G(b) - G(a)) = \lim_{n\to\infty} \sigma_{F_n} = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

Példa

$$\int_1^3 x^2 + 1 \, \mathrm{d}x = ?$$

Példa

$$\int_1^3 x^2 + 1 \, \mathrm{dx} = ?$$

Tehát itt $f(x) = x^2 + 1$. A Newton-Leibniz formula szerint:
$\int_a^b f(x) \, \mathrm{dx} = F(b) - F(a)$ ahol $F(x)$ az $f(x)$ függvény primitív függvénye.

Példa

$$\int_1^3 x^2 + 1 \, dx = ?$$

Tehát itt $f(x) = x^2 + 1$. A Newton-Leibniz formula szerint: $\int_a^b f(x) \, dx = F(b) - F(a)$ ahol $F(x)$ az $f(x)$ függvény primitív függvénye.

Az $x^2 + 1$ primitív függvénye például a $\frac{x^3}{3} + x$. Így:

$$\int_1^3 x^2 + 1 \, dx = F(3) - F(1) = \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Big|_{x=3} - \left(\frac{x^3}{3} + x\right)\Big|_{x=1} =$$

$$= \left(\frac{27}{3} + 3\right) - \left(\frac{1}{3} + 1\right) = 11 - \frac{1}{3}$$

A határozott integrál tulajdonságai

1. Ha $f \in R_{[a,b]}$ akkor $\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{dx} = -\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$

A határozott integrál tulajdonságai

1. Ha $f \in R_{[a,b]}$ akkor $\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$
2. $\int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$

A határozott integrál tulajdonságai

1. Ha $f \in R_{[a,b]}$ akkor $\int_b^a f(x)\,\mathrm{dx} = -\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$
2. $\int_a^a f(x)\,\mathrm{dx} = 0$
3. Ha $f \in R_{[a,c]}$ és $f \in R_{[c,b]}$ $\quad (a < c < b) \Rightarrow f \in R_{[a,b]}$ és

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \int_a^c f(x)\,\mathrm{dx} + \int_c^b f(x)\,\mathrm{dx}$$

A határozott integrál tulajdonságai

1. Ha $f \in R_{[a,b]}$ akkor $\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{dx} = -\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$
2. $\int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{dx} = 0$
3. Ha $f \in R_{[a,c]}$ és $f \in R_{[c,b]}$ $\quad (a < c < b) \Rightarrow f \in R_{[a,b]}$ és

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \int_a^c f(x)\,\mathrm{dx} + \int_c^b f(x)\,\mathrm{dx}$$

4. Ha $f \in R_{[a,b]}$ és $f(x) \geq 0$ ha $x \in [a,b] \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{dx} \geq 0$

A határozott integrál tulajdonságai

1. Ha $f \in R_{[a,b]}$ akkor $\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{dx} = -\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$
2. $\int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{dx} = 0$
3. Ha $f \in R_{[a,c]}$ és $f \in R_{[c,b]}$ $\quad (a < c < b) \Rightarrow f \in R_{[a,b]}$ és
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \int_a^c f(x)\,\mathrm{dx} + \int_c^b f(x)\,\mathrm{dx}$$
4. Ha $f \in R_{[a,b]}$ és $f(x) \geq 0$ ha $x \in [a,b] \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{dx} \geq 0$
5. Ha $f \in R_{[a,b]}$ akkor $\left|\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{dx}\right| \leq \int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{dx}$

Határozatlan integrál definíciója

Láttuk, hogy a primitív függvény(ek) fontosak abban, hogy ki tudjuk számítani a függvények alatti területet.

Határozatlan integrál definíciója

Láttuk, hogy a primitív függvény(ek) fontosak abban, hogy ki tudjuk számítani a függvények alatti területet.

Ha $F(x)$ primitív függvény akkor $F(x) + C$ is az (ahol C egy tetszőleges konstanst jelöl). Az Integrálszámítás első főtételéből tudjuk, hogy más primitív függvény nincsen.

Határozatlan integrál definíciója

Láttuk, hogy a primitív függvény(ek) fontosak abban, hogy ki tudjuk számítani a függvények alatti területet.

Ha $F(x)$ primitív függvény akkor $F(x) + C$ is az (ahol C egy tetszőleges konstanst jelöl). Az Integrálszámítás első főtételéből tudjuk, hogy más primitív függvény nincsen.

Definíció

Az $f(x)$ határozatlan integrálján az $f(x)$ összes primitív függvényének a halmazát értjük. Jele: $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Határozatlan integrál definíciója

Láttuk, hogy a primitív függvény(ek) fontosak abban, hogy ki tudjuk számítani a függvények alatti területet.

Ha $F(x)$ primitív függvény akkor $F(x)+C$ is az (ahol C egy tetszőleges konstanst jelöl). Az Integrálszámítás első főtételéből tudjuk, hogy más primitív függvény nincsen.

Definíció

Az $f(x)$ határozatlan integrálján az $f(x)$ összes primitív függvényének a halmazát értjük. Jele: $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Például:

$$\int x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} + C$$

Határozatlan integrál definíciója

Láttuk, hogy a primitív függvény(ek) fontosak abban, hogy ki tudjuk számítani a függvények alatti területet.

Ha $F(x)$ primitív függvény akkor $F(x) + C$ is az (ahol C egy tetszőleges konstanst jelöl). Az Integrálszámítás első főtételéből tudjuk, hogy más primitív függvény nincsen.

Definíció

Az $f(x)$ határozatlan integrálján az $f(x)$ összes primitív függvényének a halmazát értjük. Jele: $\int f(x)\,\mathrm{dx}$.

Például:

$$\int x \,\mathrm{dx} = \frac{x^2}{2} + C$$

Ezt ellenőrizni úgy lehet, hogy visszaderiváljuk tehát $(\frac{x^2}{2} + C)' = \frac{2x}{2}$

Határozatlan integrál néhány tulajdonsága

A deriválási szabályok és a definició miatt:

Határozatlan integrál néhány tulajdonsága

A derviválási szabályok és a definició miatt:

$$\int (f(x) + g(x))\,\mathrm{dx} = \int f(x)\,\mathrm{dx} + \int g(x)\,\mathrm{dx}$$

Határozatlan integrál néhány tulajdonsága

A derviválási szabályok és a definició miatt:

$$\int (f(x) + g(x))\,\mathrm{dx} = \int f(x)\,\mathrm{dx} + \int g(x)\,\mathrm{dx}$$

$$\int c \cdot f(x)\,\mathrm{dx} = c \cdot \int f(x)\,\mathrm{dx}$$

Határozatlan integrál néhány tulajdonsága

A derviválási szabályok és a definició miatt:

$$\int (f(x) + g(x))\,\mathrm{dx} = \int f(x)\,\mathrm{dx} + \int g(x)\,\mathrm{dx}$$

$$\int c \cdot f(x)\,\mathrm{dx} = c \cdot \int f(x)\,\mathrm{dx}$$

$$\int x^{\alpha}\,\mathrm{dx} = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad \alpha \neq 1$$

Példák: $\int x^{\alpha}\,\mathrm{dx} = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$

$$\int 1 + 2x + 5x^2 + 7x^3\,\mathrm{dx} =$$

Példák: $\int x^\alpha \, \mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$

$$\int 1 + 2x + 5x^2 + 7x^3 \, \mathrm{d}x = x + 2\frac{x^2}{2} + 5\frac{x^3}{3} + 7\frac{x^4}{4} + C$$

Példák: $\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$

$$\begin{aligned}\int 1 + 2x + 5x^2 + 7x^3 \, dx =& x + 2\frac{x^2}{2} + 5\frac{x^3}{3} + 7\frac{x^4}{4} + C \\ =& x + x^2 + \frac{5}{3}x^3 + \frac{7}{4}x^4 + C\end{aligned}$$

Példák: $\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$

$$\begin{aligned}\int 1 + 2x + 5x^2 + 7x^3 \, dx =& x + 2\frac{x^2}{2} + 5\frac{x^3}{3} + 7\frac{x^4}{4} + C \\ =& x + x^2 + \frac{5}{3}x^3 + \frac{7}{4}x^4 + C\end{aligned}$$

$$\int \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} + x^\pi + x^{e+1} \, dx =$$

Példák: $\int x^{\alpha}\,\mathrm{dx} = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$

$$\begin{aligned}\int 1 + 2x + 5x^2 + 7x^3\,\mathrm{dx} =& x + 2\frac{x^2}{2} + 5\frac{x^3}{3} + 7\frac{x^4}{4} + C\\ =& x + x^2 + \frac{5}{3}x^3 + \frac{7}{4}x^4 + C\end{aligned}$$

$$\int \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} + x^{\pi} + x^{e+1}\,\mathrm{dx} = \int x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{4}{3}} + x^{\pi} + x^{e+1}\,\mathrm{dx} =$$

Példák: $\int x^\alpha \,\mathrm{dx} = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$

$$\begin{aligned}\int 1 + 2x + 5x^2 + 7x^3 \,\mathrm{dx} =& x + 2\frac{x^2}{2} + 5\frac{x^3}{3} + 7\frac{x^4}{4} + C \\ =& x + x^2 + \frac{5}{3}x^3 + \frac{7}{4}x^4 + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} + x^\pi + x^{e+1} \,\mathrm{dx} = \int x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{4}{3}} + x^\pi + x^{e+1} \,\mathrm{dx} = \\ = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{-\frac{1}{3}}}{-\frac{1}{3}} + \frac{x^{\pi+1}}{\pi+1} + \frac{x^{e+2}}{e+2} + C\end{aligned}$$

Példák: $\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$

$$\int 1 + 2x + 5x^2 + 7x^3 \, dx = x + 2\frac{x^2}{2} + 5\frac{x^3}{3} + 7\frac{x^4}{4} + C$$
$$= x + x^2 + \frac{5}{3}x^3 + \frac{7}{4}x^4 + C$$

$$\int \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} + x^\pi + x^{e+1} \, dx = \int x^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{4}{3}} + x^\pi + x^{e+1} \, dx =$$
$$= \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{x^{-\frac{1}{3}}}{-\frac{1}{3}} + \frac{x^{\pi+1}}{\pi+1} + \frac{x^{e+2}}{e+2} + C$$
$$= \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} - 3x^{-\frac{1}{3}} + \frac{x^{\pi+1}}{\pi+1} + \frac{x^{e+2}}{e+2} + C$$

Egy fontos példa

Példa:

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{dx} = ?$$

Tudjuk, hogy $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$, így logikus lenne, hogy $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{dx} = \ln(x) + C$, ahol $C \in \mathbb{R}$ egy tetszőleges konstans. De ez azt jelentené, hogy a primitív függvény csak a pozitív számokra értelmezett. Kérdés, tudunk-e mondani valamit a negatív számok esetén.

Egy fontos példa

Példa:

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{dx} = ?$$

Tudjuk, hogy $\ln'(x) = \frac{1}{x}$, így logikus lenne, hogy $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{dx} = \ln(x) + C$, ahol $C \in \mathbb{R}$ egy tetszőleges konstans. De ez azt jelentené, hogy a primitív függvény csak a pozitív számokra értelmezett. Kérdés, tudunk-e mondani valamit a negatív számok esetén.

Vizsgáljuk meg $\ln(-x)$ deriváltját! Ez a függvény csak a negatív számokra értelmezett.

Egy fontos példa

Példa:

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{dx} = ?$$

Tudjuk, hogy $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$, így logikus lenne, hogy $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{dx} = \ln(x) + C$, ahol $C \in \mathbb{R}$ egy tetszőleges konstans. De ez azt jelentené, hogy a primitív függvény csak a pozitív számokra értelmezett. Kérdés, tudunk-e mondani valamit a negatív számok esetén.

Vizsgáljuk meg $\ln(-x)$ deriváltját! Ez a függvény csak a negatív számokra értelmezett.

$$(\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-x)' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$$

Egy fontos példa

Példa:

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{dx} = ?$$

Tudjuk, hogy $\ln'(x) = \frac{1}{x}$, így logikus lenne, hogy $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{dx} = \ln(x) + C$, ahol $C \in \mathbb{R}$ egy tetszőleges konstans. De ez azt jelentené, hogy a primitív függvény csak a pozitív számokra értelmezett. Kérdés, tudunk-e mondani valamit a negatív számok esetén.

Vizsgáljuk meg $\ln(-x)$ deriváltját! Ez a függvény csak a negatív számokra értelmezett.

$$(\ln(-x))' = \frac{1}{-x}(-x)' = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$$

Ennek is $\frac{1}{x}$ a deriváltja!

Egy fontos példa II

Tehát $\frac{1}{x}$ primitív függvénye $\ln(x)$ ha x pozitív, és $\ln(-x)$ ha x negatív. Így:

Egy fontos példa II

Tehát $\frac{1}{x}$ primitív függvénye $\ln(x)$ ha x pozitív, és $\ln(-x)$ ha x negatív. Így:

$$\int \frac{1}{x} = \ln|x|$$

Egy fontos példa II

Tehát $\frac{1}{x}$ primitív függvénye $\ln(x)$ ha x pozitív, és $\ln(-x)$ ha x negatív. Így:

$$\int \frac{1}{x} = \ln|x|$$

Példa:

$$\int \frac{1}{3x+4}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+\frac{4}{3}}\,\mathrm{dx} = \frac{\ln\left|x+\frac{4}{3}\right|}{3} + C$$

További szabályok

$$\int a^x \, \mathrm{dx} = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$$

További szabályok

$$\int a^x \, \mathrm{dx} = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$$

További szabályok

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$$

További szabályok

$$\int a^x \, \mathrm{dx} = \frac{a^x}{\ln(a)} + C$$

Példa:

$$\int \frac{2 \cdot 5^x + 5 \cdot 2^x}{5^x} \, \mathrm{dx} = \int 2 + 5 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^x \mathrm{dx} = 2x + \frac{5}{\ln\left(\frac{2}{5}\right)} \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^x + C$$

További szabály

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{dx} = \frac{F(ax+c)}{a} + C$$

További szabály

$\int f(ax+b)\,\mathrm{dx} = \frac{F(ax+c)}{a} + C$

Példa:

$$\int (2x+5)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{dx} = \frac{(2x+5)^{\frac{5}{2}}}{2\cdot\frac{5}{2}} + C$$

További szabály

$\int f(ax+b)\,\mathrm{dx} = \frac{F(ax+c)}{a} + C$

Példa:

$$\int (2x+5)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{dx} = \frac{(2x+5)^{\frac{5}{2}}}{2\cdot\frac{5}{2}} + C$$

$$= \frac{(2x+5)^{\frac{5}{2}}}{5} + C$$

További szabály

$\int f(ax+b)\,\mathrm{dx} = \frac{F(ax+c)}{a} + C$

Példa:

$$\int (2x+5)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{dx} = \frac{(2x+5)^{\frac{5}{2}}}{2\cdot\frac{5}{2}} + C$$
$$= \frac{(2x+5)^{\frac{5}{2}}}{5} + C$$

$$\int \sinh(5x-7)\,\mathrm{dx} =$$

További szabály

$\int f(ax+b)\,\mathrm{dx} = \frac{F(ax+c)}{a} + C$

Példa:

$$\int (2x+5)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{dx} = \frac{(2x+5)^{\frac{5}{2}}}{2\cdot\frac{5}{2}} + C$$
$$= \frac{(2x+5)^{\frac{5}{2}}}{5} + C$$

$$\int \sinh(5x-7)\,\mathrm{dx} = \frac{\cosh(5x-7)}{5} + C$$

Példák: $\int f(ax+b)\,\mathrm{dx} = \frac{F(ax+c)}{a} + C$

$$\int \frac{1}{\cos^2(4-3x)}\,\mathrm{dx} =$$

Példák: $\int f(ax+b)\,\mathrm{dx} = \frac{F(ax+c)}{a} + C$

$$\int \frac{1}{\cos^2(4-3x)}\,\mathrm{dx} = \frac{\tan(4-3x)}{-3} + C$$

Példák: $\int f(ax+b)\,\mathrm{dx} = \frac{F(ax+c)}{a} + C$

$$\int \frac{1}{\cos^2(4-3x)}\,\mathrm{dx} = \frac{\tan(4-3x)}{-3} + C$$

$$\int \frac{1}{4-3x}\,\mathrm{dx} =$$

Példák: $\int f(ax+b)\,\mathrm{dx} = \frac{F(ax+c)}{a} + C$

$$\int \frac{1}{\cos^2(4-3x)}\,\mathrm{dx} = \frac{\tan(4-3x)}{-3} + C$$

$$\int \frac{1}{4-3x}\,\mathrm{dx} = \frac{\ln|4-3x|}{-3} + C$$

Példák: $\int f(ax+b)\,\mathrm{dx} = \frac{F(ax+c)}{a} + C$

$$\int \frac{1}{\cos^2(4-3x)}\,\mathrm{dx} = \frac{\tan(4-3x)}{-3} + C$$

$$\int \frac{1}{4-3x}\,\mathrm{dx} = \frac{\ln|4-3x|}{-3} + C$$

$$\int \frac{e^{7x+1}}{e^{2x}}\,\mathrm{dx} =$$

Példák: $\int f(ax+b)\,\mathrm{dx} = \frac{F(ax+c)}{a} + C$

$$\int \frac{1}{\cos^2(4-3x)}\,\mathrm{dx} = \frac{\tan(4-3x)}{-3} + C$$

$$\int \frac{1}{4-3x}\,\mathrm{dx} = \frac{\ln|4-3x|}{-3} + C$$

$$\int \frac{e^{7x+1}}{e^{2x}}\,\mathrm{dx} = \int e^{5x+1}\,\mathrm{dx} =$$

Példák: $\int f(ax+b)\,\mathrm{dx} = \frac{F(ax+c)}{a} + C$

$$\int \frac{1}{\cos^2(4-3x)}\,\mathrm{dx} = \frac{\tan(4-3x)}{-3} + C$$

$$\int \frac{1}{4-3x}\,\mathrm{dx} = \frac{\ln|4-3x|}{-3} + C$$

$$\int \frac{e^{7x+1}}{e^{2x}}\,\mathrm{dx} = \int e^{5x+1}\,\mathrm{dx} = \frac{e^{5x+1}}{5} + C$$

Példák: $\int f(ax+b)\,dx = \frac{F(ax+c)}{a} + C$

$$\int \frac{1}{\cos^2(4-3x)}\,dx = \frac{\tan(4-3x)}{-3} + C$$

$$\int \frac{1}{4-3x}\,dx = \frac{\ln|4-3x|}{-3} + C$$

$$\int \frac{e^{7x+1}}{e^{2x}}\,dx = \int e^{5x+1}\,dx = \frac{e^{5x+1}}{5} + C$$

$$\int \sqrt{5-2x}\,dx =$$

Példák: $\int f(ax+b)\,\mathrm{dx} = \frac{F(ax+c)}{a} + C$

$$\int \frac{1}{\cos^2(4-3x)}\,\mathrm{dx} = \frac{\tan(4-3x)}{-3} + C$$

$$\int \frac{1}{4-3x}\,\mathrm{dx} = \frac{\ln|4-3x|}{-3} + C$$

$$\int \frac{e^{7x+1}}{e^{2x}}\,\mathrm{dx} = \int e^{5x+1}\,\mathrm{dx} = \frac{e^{5x+1}}{5} + C$$

$$\int \sqrt{5-2x}\,\mathrm{dx} = \frac{(5-2x)^{\frac{3}{2}}}{-2\frac{3}{2}} + C$$

Példák: $\int f(ax+b)\,\mathrm{dx} = \frac{F(ax+c)}{a} + C$

$$\int \frac{1}{\cos^2(4-3x)}\,\mathrm{dx} = \frac{\tan(4-3x)}{-3} + C$$

$$\int \frac{1}{4-3x}\,\mathrm{dx} = \frac{\ln|4-3x|}{-3} + C$$

$$\int \frac{e^{7x+1}}{e^{2x}}\,\mathrm{dx} = \int e^{5x+1}\,\mathrm{dx} = \frac{e^{5x+1}}{5} + C$$

$$\int \sqrt{5-2x}\,\mathrm{dx} = \frac{(5-2x)^{\frac{3}{2}}}{-2\frac{3}{2}} + C = -\frac{\sqrt{(5-2x)^3}}{3} + C$$

Példák: $\int f(ax+b)\,\mathrm{dx} = \frac{F(ax+c)}{a} + C$

$$\int \frac{1}{\cos^2(4-3x)}\,\mathrm{dx} = \frac{\tan(4-3x)}{-3} + C$$

$$\int \frac{1}{4-3x}\,\mathrm{dx} = \frac{\ln|4-3x|}{-3} + C$$

$$\int \frac{e^{7x+1}}{e^{2x}}\,\mathrm{dx} = \int e^{5x+1}\,\mathrm{dx} = \frac{e^{5x+1}}{5} + C$$

$$\int \sqrt{5-2x}\,\mathrm{dx} = \frac{(5-2x)^{\frac{3}{2}}}{-2\frac{3}{2}} + C = -\frac{\sqrt{(5-2x)^3}}{3} + C$$

$$\int (1+e^x)^2\,\mathrm{dx} =$$

Példák: $\int f(ax+b)\,\mathrm{dx} = \frac{F(ax+c)}{a} + C$

$$\int \frac{1}{\cos^2(4-3x)}\,\mathrm{dx} = \frac{\tan(4-3x)}{-3} + C$$

$$\int \frac{1}{4-3x}\,\mathrm{dx} = \frac{\ln|4-3x|}{-3} + C$$

$$\int \frac{e^{7x+1}}{e^{2x}}\,\mathrm{dx} = \int e^{5x+1}\,\mathrm{dx} = \frac{e^{5x+1}}{5} + C$$

$$\int \sqrt{5-2x}\,\mathrm{dx} = \frac{(5-2x)^{\frac{3}{2}}}{-2\frac{3}{2}} + C = -\frac{\sqrt{(5-2x)^3}}{3} + C$$

$$\int (1+e^x)^2\,\mathrm{dx} = \int 1 + 2e^x + e^{2x}\,\mathrm{dx} =$$

Példák: $\int f(ax+b)\,\mathrm{dx} = \frac{F(ax+c)}{a} + C$

$$\int \frac{1}{\cos^2(4-3x)}\,\mathrm{dx} = \frac{\tan(4-3x)}{-3} + C$$

$$\int \frac{1}{4-3x}\,\mathrm{dx} = \frac{\ln|4-3x|}{-3} + C$$

$$\int \frac{e^{7x+1}}{e^{2x}}\,\mathrm{dx} = \int e^{5x+1}\,\mathrm{dx} = \frac{e^{5x+1}}{5} + C$$

$$\int \sqrt{5-2x}\,\mathrm{dx} = \frac{(5-2x)^{\frac{3}{2}}}{-2\frac{3}{2}} + C = -\frac{\sqrt{(5-2x)^3}}{3} + C$$

$$\int (1+e^x)^2\,\mathrm{dx} = \int 1 + 2e^x + e^{2x}\,\mathrm{dx} = x + 2e^x + \frac{e^{2x}}{2} + C$$

További szabály

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{dx} = \ln|f(x)| + C$$

További szabály

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{dx} = \ln|f(x)| + C$$

További szabály

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{dx} = \ln|f(x)| + C$$

További szabály

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} \, \mathrm{dx} = \ln|f(x)| + C$$

Példa:

$$\int \frac{x^2}{x^3+3} \, \mathrm{dx} = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2}{x^3+3} \, \mathrm{dx} = \frac{\ln|x^3+5|}{3} + C$$

Példák: $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{dx} = \ln|f(x)| + C$

$$\int \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{dx} =$$

Példák: $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{dx} = \ln|f(x)| + C$

$$\int \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{dx} = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}\,\mathrm{dx} =$$

Példák: $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{dx} = \ln|f(x)| + C$

$$\int \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{dx} = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}\,\mathrm{dx} = \ln|\ln(x)| + C$$

Példák: $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{dx} = \ln|f(x)| + C$

$$\int \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{dx} = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}\,\mathrm{dx} = \ln|\ln(x)| + C$$

$$\int \tan(x)\,\mathrm{dx} =$$

Példák: $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{dx} = \ln|f(x)| + C$

$$\int \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{dx} = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}\,\mathrm{dx} = \ln|\ln(x)| + C$$

$$\int \tan(x)\,\mathrm{dx} = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{dx} =$$

Példák: $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{dx} = \ln|f(x)| + C$

$$\int \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{dx} = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}\,\mathrm{dx} = \ln|\ln(x)| + C$$

$$\int \tan(x)\,\mathrm{dx} = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{dx} = \ln|\cos(x)| + C$$

Példák: $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{dx} = \ln|f(x)| + C$

$$\int \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{dx} = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}\,\mathrm{dx} = \ln|\ln(x)| + C$$

$$\int \tan(x)\,\mathrm{dx} = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{dx} = \ln|\cos(x)| + C$$

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x}\,\mathrm{dx} =$$

Példák: $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{dx} = \ln|f(x)| + C$

$$\int \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{dx} = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}\,\mathrm{dx} = \ln|\ln(x)| + C$$

$$\int \tan(x)\,\mathrm{dx} = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{dx} = \ln|\cos(x)| + C$$

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x}\,\mathrm{dx} = \ln|x^2+3x| + C$$

Példák: $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{dx} = \ln|f(x)| + C$

$$\int \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{dx} = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}\,\mathrm{dx} = \ln|\ln(x)| + C$$

$$\int \tan(x)\,\mathrm{dx} = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{dx} = \ln|\cos(x)| + C$$

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x}\,\mathrm{dx} = \ln|x^2+3x| + C$$

$$\int \frac{e^{2x}}{3+e^{2x}}\,\mathrm{dx} =$$

Példák: $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln|f(x)| + C$

$$\int \frac{1}{x\ln(x)}\,dx = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}\,dx = \ln|\ln(x)| + C$$

$$\int \tan(x)\,dx = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,dx = \ln|\cos(x)| + C$$

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x}\,dx = \ln|x^2+3x| + C$$

$$\int \frac{e^{2x}}{3+e^{2x}}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2e^{2x}}{5+e^{2x}}\,dx =$$

Példák: $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{dx} = \ln|f(x)| + C$

$$\int \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{dx} = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}\,\mathrm{dx} = \ln|\ln(x)| + C$$

$$\int \tan(x)\,\mathrm{dx} = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{dx} = \ln|\cos(x)| + C$$

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x}\,\mathrm{dx} = \ln|x^2+3x| + C$$

$$\int \frac{e^{2x}}{3+e^{2x}}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\int \frac{2e^{2x}}{5+e^{2x}}\,\mathrm{dx} = \frac{\ln|5+e^{2x}|}{2} + C$$

Példák: $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{dx} = \ln|f(x)| + C$

$$\int \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{dx} = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}\,\mathrm{dx} = \ln|\ln(x)| + C$$

$$\int \tan(x)\,\mathrm{dx} = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{dx} = \ln|\cos(x)| + C$$

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x}\,\mathrm{dx} = \ln|x^2+3x| + C$$

$$\int \frac{e^{2x}}{3+e^{2x}}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\int \frac{2e^{2x}}{5+e^{2x}}\,\mathrm{dx} = \frac{\ln|5+e^{2x}|}{2} + C$$

$$\int \frac{\sin(x)}{1-\cos(x)}\,\mathrm{dx} =$$

Példák: $\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{dx} = \ln|f(x)| + C$

$$\int \frac{1}{x\ln(x)}\,\mathrm{dx} = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln(x)}\,\mathrm{dx} = \ln|\ln(x)| + C$$

$$\int \tan(x)\,\mathrm{dx} = \int \frac{\sin(x)}{\cos(x)}\,\mathrm{dx} = \ln|\cos(x)| + C$$

$$\int \frac{2x+3}{x^2+3x}\,\mathrm{dx} = \ln|x^2+3x| + C$$

$$\int \frac{e^{2x}}{3+e^{2x}}\,\mathrm{dx} = \frac{1}{2}\int \frac{2e^{2x}}{5+e^{2x}}\,\mathrm{dx} = \frac{\ln|5+e^{2x}|}{2} + C$$

$$\int \frac{\sin(x)}{1-\cos(x)}\,\mathrm{dx} = \ln|1-\cos(x)| + C$$

További szabály

$$\int f'(x) f^{\alpha}(x)\,\mathrm{dx} = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + C$$

További szabály

$$\int f'(x)f^{\alpha}(x)\,\mathrm{dx} = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + C$$

További szabály

$$\int f'(x)f^{\alpha}(x)\,\mathrm{dx} = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + C$$

További szabály

$$\int f'(x) f^{\alpha}(x)\,\mathrm{dx} = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + C$$

Példa:

$$\int \sin^3(x)\cos(x)\,\mathrm{dx} = \frac{\sin^4(x)}{4} + C$$

Példák: $\int f'(x) f^{\alpha}(x)\,\mathrm{dx} = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + C$

$$\int x\sqrt{3-x^2}\,\mathrm{dx} =$$

Példák: $\int f'(x) f^{\alpha}(x)\,\mathrm{dx} = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + C$

$$\int x\sqrt{3-x^2}\,\mathrm{dx} = -\frac{1}{2}\int -2x(3-x^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{dx} =$$

Példák: $\int f'(x)f^\alpha(x)\,\mathrm{dx} = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + C$

$$\int x\sqrt{3-x^2}\,\mathrm{dx} = -\frac{1}{2}\int -2x(3-x^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{dx} = -\frac{1}{2}\frac{(3-x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C$$

Példák: $\int f'(x) f^{\alpha}(x)\,\mathrm{dx} = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + C$

$$\int x\sqrt{3-x^2}\,\mathrm{dx} = -\frac{1}{2}\int -2x(3-x^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{dx} = -\frac{(3-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} + C$$

Példák: $\int f'(x) f^{\alpha}(x)\,\mathrm{dx} = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + C$

$$\int x\sqrt{3-x^2}\,\mathrm{dx} = -\frac{1}{2}\int -2x(3-x^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{dx} = -\frac{(3-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} + C$$

$$\int \frac{\arctan^2(x)}{1+x^2}\,\mathrm{dx} = \int \frac{1}{1+x^2}\arctan^2(x)\,\mathrm{dx} =$$

Példák: $\int f'(x)f^{\alpha}(x)\,\mathrm{dx} = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + C$

$$\int x\sqrt{3-x^2}\,\mathrm{dx} = -\frac{1}{2}\int -2x(3-x^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{dx} = -\frac{(3-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} + C$$

$$\int \frac{\arctan^2(x)}{1+x^2}\,\mathrm{dx} = \int \frac{1}{1+x^2}\arctan^2(x)\,\mathrm{dx} = \frac{\arctan^3(x)}{3} + C$$

Példák: $\int f'(x) f^{\alpha}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + C$

$$\int x\sqrt{3-x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\int -2x(3-x^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = -\frac{(3-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} + C$$

$$\int \frac{\arctan^2(x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+x^2}\arctan^2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\arctan^3(x)}{3} + C$$

$$\int \frac{\sqrt[3]{\tan(x)}}{\cos^2(x)}\,\mathrm{d}x =$$

Példák: $\int f'(x)f^{\alpha}(x)\,\mathrm{dx} = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + C$

$$\int x\sqrt{3-x^2}\,\mathrm{dx} = -\frac{1}{2}\int -2x(3-x^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{dx} = -\frac{(3-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} + C$$

$$\int \frac{\arctan^2(x)}{1+x^2}\,\mathrm{dx} = \int \frac{1}{1+x^2}\arctan^2(x)\,\mathrm{dx} = \frac{\arctan^3(x)}{3} + C$$

$$\int \frac{\sqrt[3]{\tan(x)}}{\cos^2(x)}\,\mathrm{dx} = \int \frac{1}{\cos^2(x)}\tan^{\frac{1}{3}}(x)\,\mathrm{dx} =$$

Példák: $\int f'(x)f^\alpha(x)\,\mathrm{dx} = \frac{f^{\alpha+1}(x)}{\alpha+1} + C$

$$\int x\sqrt{3-x^2}\,\mathrm{dx} = -\frac{1}{2}\int -2x(3-x^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{dx} = -\frac{(3-x^2)^{\frac{3}{2}}}{3} + C$$

$$\int \frac{\arctan^2(x)}{1+x^2}\,\mathrm{dx} = \int \frac{1}{1+x^2}\arctan^2(x)\,\mathrm{dx} = \frac{\arctan^3(x)}{3} + C$$

$$\int \frac{\sqrt[3]{\tan(x)}}{\cos^2(x)}\,\mathrm{dx} = \int \frac{1}{\cos^2(x)}\tan^{\frac{1}{3}}(x)\,\mathrm{dx} = \frac{\tan^{\frac{4}{3}}(x)}{\frac{4}{3}} + C$$