Helyettesítéses Integrál, Integrálfüggvény, Improprius integrál

dr. Farkas Lóránt Ernő

2019/2020 ősz

Helyettesítéses integrál (ismétlés)

Tétel

Legyen $f \in C^0[a,b]$, $\varphi \in C^1[\alpha,\beta]$, φ *monoton és* $\varphi[\alpha,\beta] = [a,b]$. *Ekkor*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x \Big|_{x=\varphi(t)} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

Ha $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ *akkor*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

Példa:

Számítsuk ki:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x = ?$$

Példa:

Számítsuk ki:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{dx} = ?$$

$x = \sin(t)$, $\mathrm{dx} = \mathrm{dt}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)\,\mathrm{dt} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos(t)|\cos(t)\,\mathrm{dt} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2(t)}{2} =$$

Példa:

Számítsuk ki:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{dx} = ?$$

$x = \sin(t)$, $\mathrm{dx} = \mathrm{dt}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)\,\mathrm{dt} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos(t)|\cos(t)\,\mathrm{dt} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2(t)}{2} =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2t)+1}{2}\,\mathrm{dt} = \left[\frac{\sin(2t)}{4} + \frac{t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

Példa:

Számítsuk ki:

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{dx} = ?$$

$x = \sin(t)$, $\mathrm{dx} = \mathrm{dt}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)\,\mathrm{dt} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} |\cos(t)|\cos(t)\,\mathrm{dt} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2(t)}{2} =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(2t)+1}{2}\,\mathrm{dt} = \left[\frac{\sin(2t)}{4} + \frac{t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\sin(\pi)-\sin(0)}{2} + \frac{\pi}{4} - \frac{0}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Példa:

Számítsuk ki:

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = ?$$

Példa:

Számítsuk ki:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{dx} =?$$

Legyen $x = \sin(t)$, $\mathrm{dx} = \cos(t)\,\mathrm{dt}$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{dx} = \int \sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)\,\mathrm{dx} = \int |\cos(t)|\cos(t)\,\mathrm{dx} =$$

$$= \int \cos^2(t)\,\mathrm{dx} = \int \frac{\cos(2t)+1}{2}\,\mathrm{dt} = \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} + C$$

Példa:

Számítsuk ki:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{dx} = ?$$

Legyen $x = \sin(t)$, $\mathrm{dx} = \cos(t)\,\mathrm{dt}$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{dx} = \int \sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)\,\mathrm{dx} = \int |\cos(t)|\cos(t)\,\mathrm{dx} =$$

$$= \int \cos^2(t)\,\mathrm{dx} = \int \frac{\cos(2t)+1}{2}\,\mathrm{dt} = \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} + C$$

Tudjuk, hogy $t = \arcsin(x)$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{dx} = \frac{\arcsin(x)}{2} + \frac{\sin(\arcsin(x))\cos(\arcsin(x))}{2} + C$$

Példa:

Számítsuk ki:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{dx} = ?$$

Legyen $x = \sin(t)$, $\mathrm{dx} = \cos(t)\,\mathrm{dt}$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{dx} = \int \sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)\,\mathrm{dx} = \int |\cos(t)|\cos(t)\,\mathrm{dx} =$$

$$= \int \cos^2(t)\,\mathrm{dx} = \int \frac{\cos(2t)+1}{2}\,\mathrm{dt} = \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} + C$$

Tudjuk, hogy $t = \arcsin(x)$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{dx} = \frac{\arcsin(x)}{2} + \frac{\sin(\arcsin(x))\cos(\arcsin(x))}{2} + C$$

$$= \frac{\arcsin(x)}{2} + \frac{x\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(x))}}{2} + C$$

Példa:

Számítsuk ki:

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{dx} = ?$$

Legyen $x = \sin(t)$, $\mathrm{dx} = \cos(t)\,\mathrm{dt}$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{dx} = \int \sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)\,\mathrm{dx} = \int |\cos(t)|\cos(t)\,\mathrm{dx} =$$

$$= \int \cos^2(t)\,\mathrm{dx} = \int \frac{\cos(2t)+1}{2}\,\mathrm{dt} = \frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} + C$$

Tudjuk, hogy $t = \arcsin(x)$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{dx} = \frac{\arcsin(x)}{2} + \frac{\sin(\arcsin(x))\cos(\arcsin(x))}{2} + C$$

$$= \frac{\arcsin(x)}{2} + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + C$$

Racionális törtfüggvényre visszavezethető integrálok, $\int R(e^x)\,dx =$

Számítsuk ki:

$$\int \frac{1}{1+e^x}\,dx = ?$$

Racionális törtfüggvényre visszavezethető integrálok, $\int R(e^x)\,dx =$

Számítsuk ki:

$$\int \frac{1}{1+e^x}\,dx = ?$$

Legyen $e^x = t$, $x = \ln(t)$, $dx = \frac{1}{t}\,dt$ Pl:

$$\int \frac{1}{1+e^x}\,dx = \int \frac{1}{1+t}\frac{1}{t}\,dt$$

Racionális törtfüggvényre visszavezethető integrálok, $\int R(e^x)\,dx =$

Számítsuk ki:

$$\int \frac{1}{1+e^x}\,dx = ?$$

Legyen $e^x = t$, $x = \ln(t)$, $dx = \frac{1}{t}\,dt$ PI:

$$\int \frac{1}{1+e^x}\,dx = \int \frac{1}{1+t}\frac{1}{t}\,dt$$

Itt,

$$\frac{1}{1+t}\frac{1}{t} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{t}$$

$$1 = At + B(1+t) \rightarrow t = 0 : B = 1, t = -1 : A = -1$$

Racionális törtfüggvényre visszavezethető integrálok, $\int R(e^x)\,dx =$

Számítsuk ki:

$$\int \frac{1}{1+e^x}\,dx = ?$$

Legyen $e^x = t$, $x = \ln(t)$, $dx = \frac{1}{t}\,dt$ Pl:

$$\int \frac{1}{1+e^x}\,dx = \int \frac{1}{1+t}\frac{1}{t}\,dt = \int \frac{-1}{1+t} + \frac{1}{t}\,dt$$

Itt,

$$\frac{1}{1+t}\frac{1}{t} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{t}$$

$$1 = At + B(1+t) \to t = 0 : B = 1, t = -1 : A = -1$$

Racionális törtfüggvényre visszavezethető integrálok, $\int R(e^x)\,dx =$

Számítsuk ki:

$$\int \frac{1}{1+e^x}\,dx = ?$$

Legyen $e^x = t$, $x = \ln(t)$, $dx = \frac{1}{t}\,dt$ Pl:

$$\int \frac{1}{1+e^x}\,dx = \int \frac{1}{1+t}\frac{1}{t}\,dt = \int \frac{-1}{1+t} + \frac{1}{t}\,dt$$
$$= -\ln(1+t) + \ln(t) + C = -\ln(1+e^x) + x + C$$

Itt,

$$\frac{1}{1+t}\frac{1}{t} = \frac{A}{1+t} + \frac{B}{t}$$
$$1 = At + B(1+t) \rightarrow t = 0 : B = 1, t = -1 : A = -1$$

$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})\,\mathrm{dx} =, \ \sqrt[n]{ax+b} = t$

Számítsuk ki:

$$\int \frac{x-3}{(x+1)\sqrt{x-2}}\,\mathrm{dx} = ?$$

$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})\,\mathrm{dx} =, \ \sqrt[n]{ax+b} = t$

Számítsuk ki:

$$\int \frac{x-3}{(x+1)\sqrt{x-2}}\,\mathrm{dx} = ?$$

Legyen $\sqrt{x-2} = t,\ t^2 = x-2,\ t^2+2 = x,\ 2t\,\mathrm{dt} = \mathrm{dx}$

$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})\,\mathrm{dx} =, \ \sqrt[n]{ax+b} = t$

Számítsuk ki:

$$\int \frac{x-3}{(x+1)\sqrt{x-2}}\,\mathrm{dx} = ?$$

Legyen $\sqrt{x-2} = t,\ t^2 = x-2,\ t^2+2 = x,\ 2t\,\mathrm{dt} = \mathrm{dx}$

$$\int \frac{x-3}{(x+1)\sqrt{x-2}}\,\mathrm{dx} = \int \frac{t^2-1}{(t^2+3)t} 2t\,\mathrm{dt}$$

$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})\,\mathrm{dx} =, \ \sqrt[n]{ax+b} = t$

Számítsuk ki:

$$\int \frac{x-3}{(x+1)\sqrt{x-2}}\,\mathrm{dx} = ?$$

Legyen $\sqrt{x-2} = t$, $t^2 = x-2$, $t^2+2 = x$, $2t\,\mathrm{dt} = \mathrm{dx}$

$$\int \frac{x-3}{(x+1)\sqrt{x-2}}\,\mathrm{dx} = \int \frac{t^2-1}{(t^2+3)t} 2t\,\mathrm{dt}$$

$$= 2\int \frac{t^2+3-4}{t^2+3}\,\mathrm{dt} = 2\int 1 - \frac{4}{3}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}\,\mathrm{dt}$$

$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})\,\mathrm{dx} =, \quad \sqrt[n]{ax+b} = t$

Számítsuk ki:

$$\int \frac{x-3}{(x+1)\sqrt{x-2}}\,\mathrm{dx} = ?$$

Legyen $\sqrt{x-2} = t,\ t^2 = x-2,\ t^2+2 = x,\ 2t\,\mathrm{dt} = \mathrm{dx}$

$$\int \frac{x-3}{(x+1)\sqrt{x-2}}\,\mathrm{dx} = \int \frac{t^2-1}{(t^2+3)t} 2t\,\mathrm{dt}$$

$$= 2\int \frac{t^2+3-4}{t^2+3}\,\mathrm{dt} = 2\int 1 - \frac{4}{3}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}\,\mathrm{dt}$$

$$= 2t - \frac{8}{3}\frac{\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{3}}} + C$$

$\int R(x, \sqrt[n]{ax+b})\,\mathrm{dx} =, \quad \sqrt[n]{ax+b} = t$

Számítsuk ki:

$$\int \frac{x-3}{(x+1)\sqrt{x-2}}\,\mathrm{dx} = ?$$

Legyen $\sqrt{x-2} = t,\ t^2 = x-2,\ t^2+2 = x,\ 2t\,\mathrm{dt} = \mathrm{dx}$

$$\int \frac{x-3}{(x+1)\sqrt{x-2}}\,\mathrm{dx} = \int \frac{t^2-1}{(t^2+3)t} 2t\,\mathrm{dt}$$

$$= 2\int \frac{t^2+3-4}{t^2+3}\,\mathrm{dt} = 2\int 1 - \frac{4}{3}\frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2}\,\mathrm{dt}$$

$$= 2t - \frac{8}{3}\frac{\arctan\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{3}}} + C$$

$$= 2\sqrt{x-2} - \frac{8}{\sqrt{3}}\arctan\sqrt{\frac{x-2}{3}} + C$$

$\int R\left(x^{\frac{p_i}{q_i}} i = (1,2,\ldots,n)\right) \mathrm{dx},\ x^{\frac{1}{q}} = t,\ q = [q_1,q_2,\ldots,q_n]$

Számítsuk ki:

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}} + 1} \, \mathrm{dx} = ?$$

$\int R\left(x^{\frac{p_i}{q_i}} i = (1,2,\ldots,n)\right) \mathrm{dx}, \; x^{\frac{1}{q}} = t, \; q = [q_1,q_2,\ldots,q_n]$

Számítsuk ki:

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}}+1}\,\mathrm{dx} = ?$$

Legyen $x^{\frac{1}{4}} = t, \; t^4 = x, \; 4t^3\,\mathrm{dt} = \mathrm{dx}$

$\int R\left(x^{\frac{p_i}{q_i}} i = (1,2,\ldots,n)\right) \mathrm{dx},\; x^{\frac{1}{q}} = t,\; q = [q_1,q_2,\ldots,q_n]$

Számítsuk ki:

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}}+1}\,\mathrm{dx} = ?$$

Legyen $x^{\frac{1}{4}} = t$, $t^4 = x$, $4t^3\,\mathrm{dt} = \mathrm{dx}$

$$\int \frac{t^2}{t^3+1} 4t^3\,\mathrm{dx} = 4\int \frac{t^5}{t^3+1}\,\mathrm{dt} = 4\int \frac{t^5+t^2-t^2}{t^3+1}\,\mathrm{dt}$$

$\int R\left(x^{\frac{p_i}{q_i}} i = (1,2,\ldots,n)\right) \mathrm{dx},\ x^{\frac{1}{q}} = t,\ q = [q_1,q_2,\ldots,q_n]$

Számítsuk ki:

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}}+1}\,\mathrm{dx} =?$$

Legyen $x^{\frac{1}{4}} = t,\ t^4 = x,\ 4t^3\,\mathrm{dt} = \mathrm{dx}$

$$\int \frac{t^2}{t^3+1}4t^3\,\mathrm{dx} = 4\int \frac{t^5}{t^3+1}\,\mathrm{dt} = 4\int \frac{t^5+t^2-t^2}{t^3+1}\,\mathrm{dt}$$

$$= 4\int t^2 - \frac{t^2}{t^3+3}\,\mathrm{dt} = 4\int t^2 - \frac{1}{3}\frac{3t^2}{1+t^3}\,\mathrm{dt} =$$

$\int R\left(x^{\frac{p_i}{q_i}} i = (1,2,\ldots,n)\right) \mathrm{dx},\ x^{\frac{1}{q}} = t,\ q = [q_1, q_2, \ldots, q_n]$

Számítsuk ki:

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}} + 1} \, \mathrm{dx} = ?$$

Legyen $x^{\frac{1}{4}} = t,\ t^4 = x,\ 4t^3 \, \mathrm{dt} = \mathrm{dx}$

$$\int \frac{t^2}{t^3 + 1} 4t^3 \, \mathrm{dx} = 4 \int \frac{t^5}{t^3 + 1} \, \mathrm{dt} = 4 \int \frac{t^5 + t^2 - t^2}{t^3 + 1} \, \mathrm{dt}$$
$$= 4 \int t^2 - \frac{t^2}{t^3 + 3} \, \mathrm{dt} = 4 \int t^2 - \frac{1}{3} \frac{3t^2}{1 + t^3} \, \mathrm{dt} =$$
$$= \frac{4}{3} t^3 - \frac{4}{3} \ln \left| t^3 + 1 \right| + C$$

$\int R\left(x^{\frac{p_i}{q_i}} i = (1,2,\ldots,n)\right) \mathrm{dx},\ x^{\frac{1}{q}} = t,\ q = [q_1,q_2,\ldots,q_n]$

Számítsuk ki:

$$\int \frac{x^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{3}{4}}+1}\,\mathrm{dx} = ?$$

Legyen $x^{\frac{1}{4}} = t,\ t^4 = x,\ 4t^3\,\mathrm{dt} = \mathrm{dx}$

$$\int \frac{t^2}{t^3+1} 4t^3\,\mathrm{dx} = 4\int \frac{t^5}{t^3+1}\,\mathrm{dt} = 4\int \frac{t^5+t^2-t^2}{t^3+1}\,\mathrm{dt}$$
$$= 4\int t^2 - \frac{t^2}{t^3+3}\,\mathrm{dt} = 4\int t^2 - \frac{1}{3}\frac{3t^2}{1+t^3}\,\mathrm{dt} =$$
$$= \frac{4}{3}t^3 - \frac{4}{3}\ln\left|t^3+1\right| + C$$
$$= \frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3} - \frac{4}{3}\ln\left|\sqrt[4]{x^3}+1\right| + C$$

$\int R(\sin(x), \cos(x))\,\mathrm{dx}$

$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \rightarrow,\ x = 2\arctan(x) \rightarrow,\ \mathrm{dx} = \frac{2}{1+x^2}$

$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

$\int R(\sin(x), \cos(x))\,\mathrm{dx}$

$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \to,\ x = 2\arctan(x) \to,\ \mathrm{dx} = \frac{2}{1+x^2}$

$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

Példa:

$$\int \frac{\mathrm{dx}}{\sin(x)(1-\cos(x))} = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{dt} = \int \frac{1+t^2}{2t}\,\mathrm{dt}$$

$\int R(\sin(x), \cos(x))\,\mathrm{dx}$

$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \rightarrow, \; x = 2\arctan(x) \rightarrow, \; \mathrm{dx} = \frac{2}{1+x^2}$

$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \; \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

Példa:

$$\int \frac{\mathrm{dx}}{\sin(x)(1-\cos(x))} = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{dt} = \int \frac{1+t^2}{2t}\,\mathrm{dt}$$

$$= \int \frac{1}{2t} + \frac{t}{2}\,\mathrm{dt} =$$

$\int R(\sin(x), \cos(x))\, dx$

$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \to, \; x = 2\arctan(x) \to, \; dx = \frac{2}{1+x^2}$

$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2}, \; \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

Példa:

$$\int \frac{dx}{\sin(x)(1-\cos(x))} = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \frac{2}{1+t^2}\, dt = \int \frac{1+t^2}{2t}\, dt$$

$$= \int \frac{1}{2t} + \frac{t}{2}\, dt = \frac{1}{2}\ln|t| + \frac{t^2}{4} + C$$

$\int R(\sin(x), \cos(x))\,dx$

$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right) \rightarrow,\ x = 2\arctan(x) \rightarrow,\ dx = \frac{2}{1+x^2}$
$\sin(x) = \frac{2t}{1+t^2},\ \cos(x) = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

Példa:

$$\int \frac{dx}{\sin(x)(1-\cos(x))} = \int \frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}\left(1+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)} \frac{2}{1+t^2}\,dt = \int \frac{1+t^2}{2t}\,dt$$

$$= \int \frac{1}{2t} + \frac{t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\ln|t| + \frac{t^2}{4} + C = \frac{1}{2}\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + \frac{\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{4} + C$$

Az integrálfüggvény definíciója

Az integrált egy véges szakaszon a függvény alatti területnek definiáltuk. Érdemes definiálni a

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = F(x)$$

mennyiséget.

Az integrálfüggvény definíciója

Az integrált egy véges szakaszon a függvény alatti területnek definiáltuk. Érdemes definiálni a

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = F(x)$$

mennyiséget.

Tétel

Ha $f \in R_{[a,b]}$ akkor F folytonos, és ha ráadásképp f folytonos is akkor $F'(x) = f(x)$

Példa az integrálfüggvényre

Például az

$$\int_0^x e^{-t^2}\,dt = F(x)$$

függvényt zárt alakban nem tudjuk felírni, de tudjuk, hogy:

Példa az integrálfüggvényre

Például az

$$\int_0^x e^{-t^2}\,dt = F(x)$$

függvényt zárt alakban nem tudjuk felírni, de tudjuk, hogy:

1. $F(0) = 0$
2. $F'(x) = e^{-x^2} > 0$ tehát monoton nő
3. $F''(x) = -2x\,e^{-x^2}$ tehát konvex, ha $x < 0$ konkáv, ha $x > 0$

Háttér

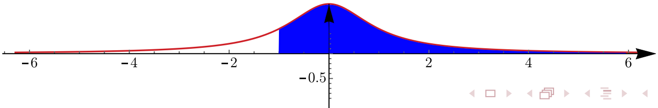
Eddig az integrált csak véges intervallumon, korlátos függvényre definiáltuk. De ugyanúgy kérdés lehet, akár egy fizikai rendszernél is, hogy mi az integrálja egy esetleg nem korlátos függvénynek egy esetleg nem korlátos tartományon.

Első típus: a tartomány végtelen

Tanultunk határértéket, így definiálhatjuk a

$$\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{dx}$$

integrált, mint egy határérték:



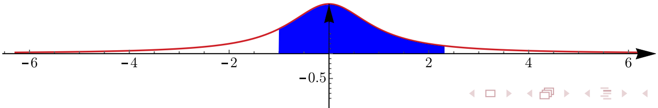
Első típus: a tartomány végtelen

Tanultunk határértéket, így definiálhatjuk a

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{dx}$$

integrált, mint egy határérték:

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{dx} = \lim_{A\to\infty} \int_a^A f(x)\,\mathrm{dx}$$



Első típus: a tartomány végtelen

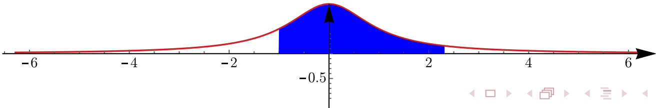
Tanultunk határértéket, így definiálhatjuk a

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{dx}$$

integrált, mint egy határérték:

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{dx} = \lim_{A\to\infty}\int_a^A f(x)\,\mathrm{dx}$$

mivel a jobboldal minden egyes véges A-ra jól definiált, kiszámíthatjuk a határértékét. Ha a határérték létezik és véges akkor azt mondjuk, hogy az imprópius integrál konvergens. Különben divergensnek mondjuk.



Első típus: a tartomány végtelen

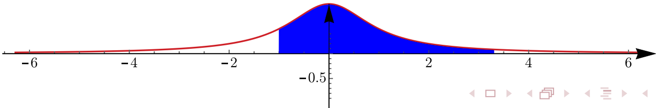
Tanultunk határértéket, így definiálhatjuk a

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{dx}$$

integrált, mint egy határérték:

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{dx} = \lim_{A\to\infty} \int_a^A f(x)\,\mathrm{dx}$$

mivel a jobboldal minden egyes véges A-ra jól definiált, kiszámíthatjuk a határértékét. Ha a határérték létezik és véges akkor azt mondjuk, hogy az imprópius integrál konvergens. Különben divergensnek mondjuk.



Első típus: a tartomány végtelen

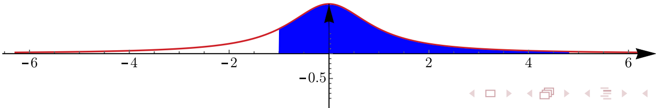
Tanultunk határértéket, így definiálhatjuk a

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{dx}$$

integrált, mint egy határérték:

$$\int_a^\infty f(x)\,\mathrm{dx} = \lim_{A\to\infty} \int_a^A f(x)\,\mathrm{dx}$$

mivel a jobboldal minden egyes véges A-ra jól definiált, kiszámíthatjuk a határértékét. Ha a határérték létezik és véges akkor azt mondjuk, hogy az imprópriusz integrál konvergens. Különben divergensnek mondjuk.



Első típus: a tartomány végtelen

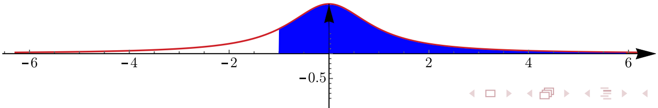
Tanultunk határértéket, így definiálhatjuk a

$$\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{dx}$$

integrált, mint egy határérték:

$$\int_a^{\infty} f(x)\,\mathrm{dx} = \lim_{A\to\infty} \int_a^{A} f(x)\,\mathrm{dx}$$

mivel a jobboldal minden egyes véges A-ra jól definiált, kiszámíthatjuk a határértékét. Ha a határérték létezik és véges akkor azt mondjuk, hogy az imprópius integrál konvergens. Különben divergensnek mondjuk.



Példák az első típusra

Példa:

$$\int_0^\infty 1\,\mathrm{dx} = \lim_{A\to\infty} [x]_0^A = \lim_{A\to\infty} A = \infty$$

Az impróprius integrál divergens.

Példák az első típusra

Példa:

$$\int_0^\infty 1\,\mathrm{dx} = \lim_{A\to\infty} [x]_0^A = \lim_{A\to\infty} A = \infty$$

Az imprópius integrál divergens.

Példa:

$$\int_0^\infty \sin(x)\,\mathrm{dx} = ?$$

Példák az első típusra

Példa:

$$\int_0^\infty 1\,\mathrm{dx} = \lim_{A\to\infty} [x]_0^A = \lim_{A\to\infty} A = \infty$$

Az impróprius integrál divergens.

Példa:

$$\int_0^\infty \sin(x)\,\mathrm{dx} = ?$$

$$\int_0^\infty \sin(x)\,\mathrm{dx} = \lim_{A\to\infty} \int_0^A \sin(x)\,\mathrm{dx} = \lim_{A\to\infty} 1 - \cos(A)$$

Példák az első típusra

Példa:

$$\int_0^\infty 1\,\mathrm{dx} = \lim_{A\to\infty} [x]_0^A = \lim_{A\to\infty} A = \infty$$

Az imprópius integrál divergens.

Példa:

$$\int_0^\infty \sin(x)\,\mathrm{dx} = ?$$

$$\int_0^\infty \sin(x)\,\mathrm{dx} = \lim_{A\to\infty} \int_0^A \sin(x)\,\mathrm{dx} = \lim_{A\to\infty} 1 - \cos(A)$$

Ennek sem létezik határértéke.

Példák az első típusra

Példa:

$$\int_{2}^{\infty} \frac{6}{x^2 + x - 2} \, dx = ?$$

Példák az első típusra

Példa:

$$\int_{2}^{\infty} \frac{6}{x^2 + x - 2}\,\mathrm{dx} = ?$$

Bontsuk parciális törtekre:

$$\frac{6}{x^2 + x - 2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} \to 6 = A(x+2) + B(x-1)$$

Példák az első típusra

Példa:

$$\int_2^\infty \frac{6}{x^2+x-2}\,\mathrm{dx} = ?$$

Bontsuk parciális törtekre:

$$\frac{6}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} \to 6 = A(x+2) + B(x-1)$$

$x = -2 \to B = -2$, $x = 1 \to A = 2$, innen

Példák az első típusra

Példa:

$$\int_2^\infty \frac{6}{x^2+x-2}\,\mathrm{dx} = ?$$

Bontsuk parciális törtekre:

$$\frac{6}{x^2+x-2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} \to 6 = A(x+2) + B(x-1)$$

$x = -2 \to B = -2$, $x = 1 \to A = 2$, innen

$$\int_2^\infty \frac{6}{x^2+x-2}\,\mathrm{dx} = \lim_{A\to\infty} \int_2^A \frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+2}\,\mathrm{dx} =$$

$$= \lim_{A\to\infty} \left[\ln|x-1| - \ln|x+2|\right]_2^A = \lim_{A\to\infty} \ln|A-1| - \ln|A+2| + \ln(4) =$$

$$= \lim_{A\to\infty} \ln \underbrace{\left|\frac{A-1}{A+2}\right|}_{\to 1} + \ln(4) = \ln(4).$$ Ez konvergens.

Példák az első típusra

Természetesen $-\infty$-re analóg módon megy, példa:

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{(x-2)\sqrt{\ln^3(2-x)}}\,\mathrm{dx} = ?$$

Példák az első típusra

Természetesen $-\infty$-re analóg módon megy, példa:

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{(x-2)\sqrt{\ln^3(2-x)}}\,\mathrm{d}x = ?$$

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{(x-2)\sqrt{\ln^3(2-x)}}\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to-\infty} \int_{A}^{-1} \frac{-1}{2-x} \ln^{-\frac{3}{2}}(2-x)\,\mathrm{d}x =$$

Példák az első típusra

Természetesen $-\infty$-re analóg módon megy, példa:

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{(x-2)\sqrt{\ln^3(2-x)}}\,dx = ?$$

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{(x-2)\sqrt{\ln^3(2-x)}}\,dx = \lim_{A\to-\infty} \int_{A}^{-1} \frac{-1}{2-x} \ln^{-\frac{3}{2}}(2-x)\,dx =$$

$$= \lim_{A\to-\infty} \left[\frac{\ln^{-\frac{1}{2}}(2-x)}{-\frac{1}{2}}\right]_A^{-1} = \lim_{A\to-\infty} -\frac{2}{\sqrt{\ln(3)}} + \frac{2}{\sqrt{\ln(2-A)}}$$

Példák az első típusra

Természetesen $-\infty$-re analóg módon megy, példa:

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{(x-2)\sqrt{\ln^3(2-x)}}\,dx = ?$$

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{(x-2)\sqrt{\ln^3(2-x)}}\,dx = \lim_{A\to-\infty} \int_{A}^{-1} \frac{-1}{2-x} \ln^{-\frac{3}{2}}(2-x)\,dx =$$

$$= \lim_{A\to-\infty} \left[\frac{\ln^{-\frac{1}{2}}(2-x)}{-\frac{1}{2}}\right]_A^{-1} = \lim_{A\to-\infty} -\frac{2}{\sqrt{\ln(3)}} + \frac{2}{\sqrt{\ln(2-A)}}$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{\ln(3)}}$$

Példák az első típusra

Természetesen $-\infty$-re analóg módon megy, példa:

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{(x-2)\sqrt{\ln^3(2-x)}}\,dx = ?$$

$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{(x-2)\sqrt{\ln^3(2-x)}}\,dx = \lim_{A\to-\infty} \int_{A}^{-1} \frac{-1}{2-x} \ln^{-\frac{3}{2}}(2-x)\,dx =$$

$$= \lim_{A\to-\infty} \left[\frac{\ln^{-\frac{1}{2}}(2-x)}{-\frac{1}{2}}\right]_A^{-1} = \lim_{A\to-\infty} -\frac{2}{\sqrt{\ln(3)}} + \frac{2}{\sqrt{\ln(2-A)}}$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{\ln(3)}}$$

Tehát konvergens

Fontos megjegyzés

Megjegyzés: Az $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ impróprius integrált (ahol a és b lehet $\pm\infty$ is) csak akkor mondjuk konvergensnek, ha minden $c \in (a,b)$-re

$$\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

integrálok konvegensek.

Fontos megjegyzés (Példa)

Példa:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \, \mathrm{dx} = \lim_{A\to\infty} \lim_{B\to\infty} \int_{-A}^{B} x \, \mathrm{dx}$$

Ha $A = B$-t választanánk, akkor ez minden A-ra egyenlő lenne

$$\int_{-A}^{A} x \, \mathrm{dx} = \lim_{A\to 0} \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-A}^{A} = 0$$

Fontos megjegyzés (Példa)

Példa:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \, \mathrm{dx} = \lim_{A \to \infty} \lim_{B \to \infty} \int_{-A}^{B} x \, \mathrm{dx}$$

Ha $A = B$-t választanánk, akkor ez minden A-ra egyenlő lenne

$$\int_{-A}^{A} x \, \mathrm{dx} = \lim_{A \to 0} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-A}^{A} = 0$$

De a fenti megjegyzésben $c = 0$-t választva

$$\lim_{A \to \infty} \int_{0}^{A} x \, \mathrm{dx} = \lim_{A \to 0} \left[\frac{A^2}{2} \right],$$

Fontos megjegyzés (Példa)

Példa:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\,\mathrm{dx} = \lim_{A\to\infty} \lim_{B\to\infty} \int_{-A}^{B} x\,\mathrm{dx}$$

Ha $A = B$-t választanánk, akkor ez minden A-ra egyenlő lenne

$$\int_{-A}^{A} x\,\mathrm{dx} = \lim_{A\to 0} \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-A}^{A} = 0$$

De a fenti megjegyzésben $c = 0$-t választva

$$\lim_{A\to\infty} \int_{0}^{A} x\,\mathrm{dx} = \lim_{A\to 0} \left[\frac{A^2}{2}\right], \quad \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{0} x\,\mathrm{dx} = \lim_{A\to 0} \left[-\frac{A^2}{2}\right],$$

Fontos megjegyzés (Példa)

Példa:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \, \mathrm{d}x = \lim_{A\to\infty} \lim_{B\to\infty} \int_{-A}^{B} x \, \mathrm{d}x$$

Ha $A = B$-t választanánk, akkor ez minden A-ra egyenlő lenne

$$\int_{-A}^{A} x \, \mathrm{d}x = \lim_{A\to 0} \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-A}^{A} = 0$$

De a fenti megjegyzésben $c = 0$-t választva

$$\lim_{A\to\infty} \int_{0}^{A} x \, \mathrm{d}x = \lim_{A\to 0} \left[\frac{A^2}{2}\right], \quad \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{0} x \, \mathrm{d}x = \lim_{A\to 0} \left[-\frac{A^2}{2}\right],$$

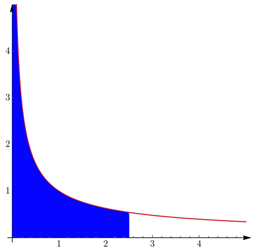
Tehát ez az impróprius integrál divergens. (Viszont szokták azt mondani, hogy Cauchy féle főértéke véges.)

Második típus: a függvény végtelen

Tegyük fel, hogy $f(x)$ nem korlátos, a-ban ekkor az:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$$

integrált, megint határértékként definiáljuk:



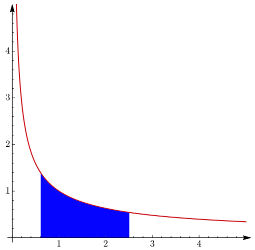
Második típus: a függvény végtelen

Tegyük fel, hogy $f(x)$ nem korlátos, a-ban ekkor az:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$$

integrált, megint határértékként definiáljuk:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \lim_{\omega \to a} \int_\omega^b f(x)\,\mathrm{dx}$$



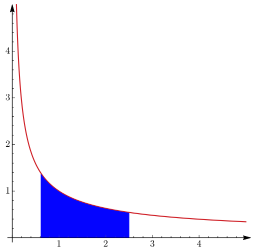
Második típus: a függvény végtelen

Tegyük fel, hogy $f(x)$ nem korlátos, a-ban ekkor az:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$$

integrált, megint határértékként definiáljuk:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \lim_{\omega \to a} \int_\omega^b f(x)\,\mathrm{dx}$$



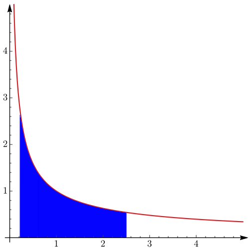
Második típus: a függvény végtelen

Tegyük fel, hogy $f(x)$ nem korlátos, a-ban ekkor az:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$$

integrált, megint határértékként definiáljuk:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \lim_{\omega \to a} \int_\omega^b f(x)\,\mathrm{dx}$$



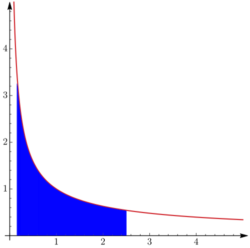
Második típus: a függvény végtelen

Tegyük fel, hogy $f(x)$ nem korlátos, a-ban ekkor az:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$$

integrált, megint határértékként definiáljuk:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \lim_{\omega\to a} \int_\omega^b f(x)\,\mathrm{dx}$$



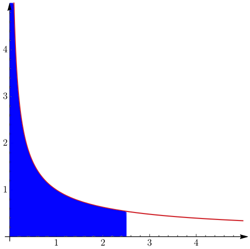
Második típus: a függvény végtelen

Tegyük fel, hogy $f(x)$ nem korlátos, a-ban ekkor az:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$$

integrált, megint határértékként definiáljuk:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \lim_{\omega \to a} \int_\omega^b f(x)\,\mathrm{dx}$$



Második típus: a függvény végtelen

Tegyük fel, hogy $f(x)$ nem korlátos, b-ban ekkor az:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

integrált, megint határértékként definiáljuk:

Második típus: a függvény végtelen

Tegyük fel, hogy $f(x)$ nem korlátos, b-ban ekkor az:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

integrált, megint határértékként definiáljuk:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\omega \to b} \int_a^\omega f(x)\,\mathrm{d}x$$

Második típus: a függvény végtelen

Tegyük fel, hogy $f(x)$ nem korlátos, $c \in (a,b)$-ben ekkor az:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$$

integrált, megint határértékként definiáljuk:

Második típus: a függvény végtelen

Tegyük fel, hogy $f(x)$ nem korlátos, $c \in (a,b)$-ben ekkor az:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx}$$

integrált, megint határértékként definiáljuk:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{dx} = \lim_{\omega \to b} \int_a^\omega f(x)\,\mathrm{dx} + \lim_{\varepsilon \to a} \int_\varepsilon^b f(x)\,\mathrm{dx}$$

Itt is igaz a Fontos megjegyzés!

Példa a második típusra

Példa:

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{\arcsin(x)}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{dx} = ?$$

Példa a második típusra

Példa:

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{\arcsin(x)}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{dx} = ?$$

Megoldás:

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{\arcsin(x)}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{dx} = \lim_{\omega\to 0} \int_0^{1-\omega} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin^{\frac{1}{2}}(x)\,\mathrm{dx} =$$

Példa a második típusra

Példa:

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{\arcsin(x)}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{dx} = ?$$

Megoldás:

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{\arcsin(x)}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{dx} = \lim_{\omega\to 0} \int_0^{1-\omega} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin^{\frac{1}{2}}(x)\,\mathrm{dx} =$$

$$= \lim_{\omega\to 0} \left[\frac{\arcsin^{\frac{3}{2}}(x)}{\frac{3}{2}}\right]_0^{1-\omega} = \lim_{\omega\to 0} \frac{2\arcsin^{\frac{3}{2}}(1-\omega)}{3} - 0 = \frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$$