Kalkulus feladatgyűjtemény

Sáfár Orsolya

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Matematika Intézet

1. Lineáris algebra

1.1. Kidolgozott mintapéldák

1. Legyen $\mathbf{A}$ az alábbi mátrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 1 \\ -12 & -7 & 1 \\ 24 & 15 & -3 \end{bmatrix}.$$

Oldja meg az $\mathbf{A}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \\ 6 \end{bmatrix}$ egyenletet és számítsa ki $\mathbf{A}$ determinánsát és sorrangját!

Megoldás

Gauss-eliminációval:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 1 & 4 \\ -12 & -7 & 1 & -4 \\ 24 & 15 & -3 & 6 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -7 & -10 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right]$$

Innen az egyenlet megoldása visszahelyettesítéssel: $2z = 2$-ből $z = 1$, aztán $-y+3z = 4$, azaz $-y = 4-3\cdot 1 = 1$-ből $y = -1$ végül $6x+3y+z = 4$-ből $6x = 4-3(-1)-1 = 6$, azaz $x = 1$. A mátrix determinánsa a Gauss-elimináció lépései alatt nem változott és háromszög-mátrix determinánsa a főátlóban lévő elemek szorzata, így $\det(\mathbf{A}) = 6\cdot(-1)\cdot 2 = -12$.

Végül a sorrang 3, mert a Gauss-elimináció végén kapott 3×3-as mátrixnak nincs 0 a főátlójában, így 3 érdemi egyenlet van.

2. Határozza meg az alábbi mátrix determinánsát!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Megoldás: Első oszlop szerint kifejtve ki a determinánst:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

A 3×3-as determináns egy felsőháromszög, így értéke a főátlóban lévő elemek szorzata, azaz $\det(\mathbf{A}) = (-1)1(-1)(1) = 1$.

3. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} 7x + 2z &= \quad 9 \\ -14x + 4y - 3z &= -13 \\ 21x + 8y - 10z &= \quad 39 \end{aligned}$$

Megoldás

Felírva a kibővített együtthatómátrixot majd Gauss-eliminációval:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 7 & 0 & 2 & 9 \\ -14 & 4 & -3 & -13 \\ 21 & 8 & -10 & 39 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 7 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 8 & -16 & 12 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 7 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -18 & 2 \end{array}\right]$$

Innen $z = -\dfrac{1}{9}$, aztán a második sorból: $4y - \dfrac{1}{9} = 5$, innen $y = \dfrac{46}{36}$, végül az első sorból $7x - \dfrac{2}{9} = 9$, innen $x = \dfrac{83}{63}$.

4. Legyen $\mathbf{A}$ az alábbi mátrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Számítsa ki az $\mathbf{A}\mathbf{A}^T$ szorzatot, majd számítsa ki $\det(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)$-t!

Megoldás:

Azon összeadandókat, melyeknek legalább egyik tényezője 0 elhagyva:

$$\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 6\cdot 6 + (-2)(-2) + 1\cdot 1 & (-2)3 + 1(-2) & 1\cdot 2 \\ 3(-2) + (-2)1 & 3\cdot 3 + (-2)(-2) & -2\cdot 2 \\ 2\cdot 1 & 2(-2) & 2\cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 41 & -8 & 2 \\ -8 & 13 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{bmatrix}.$$

A determinánsok szorzástétele miatt $\det(\mathbf{A}\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{A}^T)$. Másrészt a transzponálás a determináns értékét nem változtatja, így $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T)$. Azaz elegendő $\mathbf{A}$ determinánsát kiszámítani.

$\mathbf{A}$ egy felső háromszög mátrix, így a determinánsa a főátlóban lévő elemek szorzata, azaz $6\cdot 3\cdot 2 = 36$. Innen $\det(\mathbf{A}\mathbf{A}^T) = 36^2 = 1296$.

5. Oldja meg az alábbi egyenletrendszert!

$$\begin{aligned} 7x + 2z &= 9 \\ -14x + 4y - 3z &= -13 \\ 21x + 8y + 8z &= 37 \end{aligned}$$

Megoldás

Felírva a kibővített együtthatómátrixot majd Gauss-eliminációval:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 7 & 0 & 2 & 9 \\ -14 & 4 & -3 & -13 \\ 21 & 8 & 8 & 37 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 7 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 8 & 2 & 10 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 7 & 0 & 2 & 9 \\ 0 & 4 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

A harmadik sorból $z = t$ tetszőleges $t \in \mathbb{R}$ paraméter, aztán a második sorból: $4y + t = 5$, innen $y = \dfrac{5-t}{4}$, végül az első sorból $7x + 2t = 9$, innen $x = \dfrac{9-2t}{7}$.

6. Döntse el, hogy van-e az alábbi mátrixnak inverze! (Ha van, akkor sem kell kiszámolnia, hogy melyik mátrix az).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 2 & 3 \\ -14 & 4 & -3 & 0 \\ 21 & 8 & 10 & 20 \\ -7 & -4 & -5 & -13 \end{bmatrix}$$

Megoldás:

Egy mátrix pontosan akkor invertálható, ha a determinánsa nem nulla, így ennek kiszámításához a fenti mátrixot Gauss-elimináljuk (mivel nincs benne sok 0 a kifejtési tétel itt nem célszerű).

$$\begin{vmatrix} 7 & 0 & 2 & 3 \\ -14 & 4 & -3 & 0 \\ 21 & 8 & 10 & 20 \\ -7 & -4 & -5 & -13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & 8 & 4 & 11 \\ 0 & -4 & -3 & -10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 7 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

Felső háromszögmátrix determinánsa a főátlóban lévő elemek szorzata, azaz

$$7 \cdot 4 \cdot 2 \cdot (-5) \neq 0,$$

tehát invertálható a mátrix.

1.2. További gyakorlófeladatok

1. Legyen $\mathbf{A}$ az alábbi mátrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 2 & 3 \\ -14 & 4 & -3 & 0 \\ 21 & 8 & 10 & 20 \\ -7 & -4 & -5 & -13 \end{bmatrix}.$$

Oldja meg az $\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} 3 \\ -21 \\ -17 \\ 18 \end{bmatrix}$ egyenletet, majd számítsa ki $\mathbf{A}$ determinánsát és sorrangját! Azt is döntse el, hogy van-e $\mathbf{A}$-nak inverze (ha van, akkor sem kell kiszámolnia, hogy melyik mátrix az)!

2. Legyen $\mathbf{A}$ az alábbi mátrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 1 \\ 12 & -7 & -2 \\ 6 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Oldja meg az $\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} 9 \\ 28 \\ -1 \end{bmatrix}$ egyenletet, majd számítsa ki $\mathbf{A}$ determinánsát és sorrangját! Azt is döntse el, hogy van-e $\mathbf{A}$-nak inverze (ha van, akkor sem kell kiszámolnia, hogy melyik mátrix az)!

3. Legyen $\mathbf{A}$ az alábbi mátrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 3 \\ -6 & -7 & 1 \end{bmatrix}.$$

Oldja meg az $\mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$ egyenletet, majd számítsa ki $\mathbf{A}$ determinánsát és sorrangját! Azt is döntse el, hogy van-e $\mathbf{A}$-nak inverze (ha van, akkor sem kell kiszámolnia, hogy melyik mátrix az)!

4. Tekintse az

$$\begin{aligned} x - 2y &= 1 \\ 2x + y &= 0 \\ -x + 3y &= -1 \end{aligned}$$

egyenletrendszert! Hány ismeretlen van? Hány egyenlet? Hány érdemi egyenlet? Megoldható-e ez az egyenletrendszer?

Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszerhez tartozó $\mathbf{A^T Ax} = \mathbf{A^T b}$ egyenletet a rendszer normál egyenletének nevezzük (mindkét oldalt beszoroztuk $\mathbf{A^T}$-al). Írja fel a normál egyenletet és döntse el, hogy van-e megoldása!

5. Tekintse az

$$\begin{aligned} -x + 2y &= 1 \\ 4x + 2y &= -1 \\ 5x + 3y &= 1 \end{aligned}$$

egyenletrendszert! Hány ismeretlen van? Hány egyenlet? Hány érdemi egyenlet? Megoldható-e ez az egyenletrendszer?

Az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ lineáris egyenletrendszerhez tartozó $\mathbf{A^T Ax} = \mathbf{A^T b}$ egyenletet a rendszer normálegyenletének nevezzük (mindkét oldalt beszoroztuk $\mathbf{A^T}$-al). Írja fel a normálegyenletet és döntse el, hogy van-e megoldása!

6. Legyen $\mathbf{A}$ az alábbi mátrix!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Számítsa ki $\det(\mathbf{A})$-t, $\det(\mathbf{A^T})$-t, $\det(\mathbf{A^{-1}})$-t, $\det(2\mathbf{A})$-t!

7. Legyenek **A** és **B** olyan $\mathbb{R}^{n\times n}$-es mátrixok, hogy $\det(\mathbf{A}) = 2$ és $\det(\mathbf{B}) = -1$. Számítsa ki az alábbi mennyiségek közül azokat, ahol a mátrixszorzás illetve inverz számítás elvégezhető!

   a, $\det(\mathbf{AB})$

   b, $\det(\mathbf{A^T B})$

   c, $\det(\mathbf{BA})$

   d, $\det(\mathbf{A^{-1} B})$

   e, $\det(\mathbf{A^{-1} B A})$

2. Sorozatok

2.1. Kidolgozott mintapéldák

1. Számítsa ki az alábbi határértéket!

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^4 + 2^{2n+1} + 10(-3)^n}{7^n + 6n^3 + 1}$$

Megoldás

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^4 + 2^{2n+1} + 10(-3)^n}{7^n + 6n^3 + 1} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^4 + 2\cdot 4^n + 10(-3)^n}{7^n + 6n^3 + 1},$$

innen a számláló nagyságrendje 4^n, a nevezőé 7^n, ezeket kiemelve:

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{4^n}{7^n} \frac{n^4 \left(\frac{1}{4}\right)^n + 2 + 10\left(-\frac{3}{4}\right)^n}{1 + 6n^3 \left(\frac{1}{7}\right)^n + \left(\frac{1}{7}\right)^n} = 0 \cdot \frac{0+2+0}{1+0+0} = 0,$$

ahol kihasználtunk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a^n n^p = 0$ ha $|a| < 1$.

2. Számítsa ki az alábbi sorozat határértékét!

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3n^2 - 4n + 3}{n^2 + 7}}$$

Megoldás:

Rendőrelvvel kell dolgoznunk, így:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{4}} \le \sqrt[n]{\frac{3n^2 - n^2}{n^2 + 7n^2}} \overbrace{\le}^{n>4} \sqrt[n]{\frac{3n^2 - 4n}{n^2 + 7n^2}} \le \sqrt[n]{\frac{3n^2 - 4n + 3}{n^2 + 7}} \le \sqrt[n]{\frac{3n^2 + 3n^2}{n^2}} = \sqrt[n]{6}$$

Mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} \to 1$ minden $p > 0$ konstansra, ezért az alsó és felső becslés is 1-hez tart, így a keresett határérték is 1.

3. Számítsa ki az alábbi sorozat határértékét!

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{3n^2-1}{n^3+4}}$$

Megoldás:

Csak rendőr-elvvel lehet kiszámítani ezt a határértéket. Ehhez alsó és felső becslésre van szükség:

$$\frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{5}\,\sqrt[n]{n}} = \sqrt[n]{\frac{3n^2-n^2}{n^3+4n^3}} \leq \sqrt[n]{\frac{3n^2-1}{n^3+4}} \leq \sqrt[n]{\frac{3n^2}{n^3}} = \frac{\sqrt[n]{3}}{\sqrt[n]{n}}$$

Mivel minden $p \in \mathbb{R}^+$ konstansra $\sqrt[n]{p} \to 1$, továbbá $\sqrt[n]{n} \to 1$, így az alsó és felső becslés is 1-hez tart, azaz a rendőr-elv miatt az eredeti határérték is 1.

4. Számítsa ki az alábbi sorozat határértékét!

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\frac{5n^2+n}{2n^2-n}}$$

Megoldás:

Rendőrelvvel kell dolgoznunk.

$$\sqrt{\sqrt[n]{\frac{5}{2}}} = \sqrt[2n]{\frac{5}{2}} \leq \sqrt[2n]{\frac{5n^2}{2n^2}} \leq \sqrt[2n]{\frac{5n^2+n}{2n^2-n}} \leq \sqrt[2n]{\frac{5n^2+n^2}{2n^2-n^2}} = \sqrt[2n]{6} = \sqrt{\sqrt[n]{6}}$$

Mivel minden $p \in \mathbb{R}^+$ konstansra $\sqrt[n]{p} \to 1$, továbbá nemnegatív tagú sorozatokra $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ esetén $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{A}$, így az alsó és felső becslés is 1-hez tart, azaz a rendőr-elv miatt az eredeti határérték is 1.

5. Számítsa ki az alábbi sorozat határértékét!

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n^3-n^2+1}$$

Megoldás:

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n^3-n^2+1}$ kiszámításához rendőrelvet alkalmazunk:

$$\sqrt[n]{2}\left(\sqrt[n]{n}\right)^3 = \sqrt[n]{3n^3-n^3} \leq \sqrt[n]{3n^3-n^2+1} \leq \sqrt[n]{3n^3+n^3} = \sqrt[n]{4}\left(\sqrt[n]{n}\right)^3$$

Mind az alsó, mind a felső becslés 1-hez tart, hiszen $\sqrt[n]{n}$ és $\sqrt[n]{p}$ is 1-hez tart, így a rendőrelv miatt az eredeti határérték is 1-hez tart.

6. Számítsa ki az alábbi sorozat határértékét!

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{3n+4}$$

Megoldás

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{3n+4}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{3n+3+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{3n+3}\left(1+\frac{2}{n+1}\right)=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{2}{n+1}\right)^{n+1}\right)^{3}\left(1+\frac{2}{n+1}\right)=\left(\mathrm{e}^2\right)^3\cdot 1=\mathrm{e}^6$$

2.2. További gyakorlófeladatok

1. Bizonyítsa be a definíció szerint, hogy

a, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2-4n+3}{n^2+7}=3$

b, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-n+\sqrt{n}}{n^2-1}=\infty$

c, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-7n+1}{2n^2+2}=\dfrac{1}{2}$

d, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4-n+2}{3n^2+1}=\infty$

2. Számítsa ki az alábbi határértékeket!

a, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{9n^4-n^2+7}-3n^2$

b, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{4n^2-3n}$

c, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{4n^2-3n}-\sqrt{4n^2+2n}$

d, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{4n^4-n^2+7}-2n^2$

3. Számítsa ki az alábbi határértékeket!

a, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^{2n-1}}{(-3)^{n-1}+4^{n+2}+n^{1001}}$

b, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n+3^n+n!}{n^3+5^{2n+3}+7^{n-1}}$

c, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(n)+n^n}{5^{-n+3}+4^{n-5}}$

d, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2\ln(n)+n^n}{7^{-n+1}+2^{n-5}+n!}$

e, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3^{2n+1}}{(-2)^{n-1}+9^{n+2}+n^3}$

4. Számítsa ki az alábbi határértékeket!

a, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^2+3n+1}$

b, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{n^2+3n+1}{n^3+1}}$

c, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{2n^2-n+1}$

d, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{2n^2+n-1}{n^4+1}}$

e, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{\dfrac{3n^2+7}{2n^2+n+1}}$

5. Számítsa ki az alábbi határértékeket!

a, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+1}{n-3}\right)^n$

b, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n+4}{2n-1}\right)^n$

c, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+4}{2n-1}\right)^n$

d, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n+4}{2n-1}\right)^{n^2}$

e, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n+4}{3n-1}\right)^{2n+1}$

f, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n+4}{n-1}\right)^{3n-1}$

g, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+4}{3n-1}\right)^{4n}$

h, $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n+4}{3n-1}\right)^{7n^2}$

i, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+6}{2n^2-1}\right)^{n^2}$

j, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+6}{2n^2-1}\right)^{n+3}$

3. Komplex számok

3.1. Kidolgozott mintapéldák

1. Határozza meg a $\dfrac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$ komplex szám algebrai alakját, ha $z_1 = 3-2i$ és $z_2 = 2+i$!

   Megoldás

   Ha $z_1 = 3-2i$ és $z_2 = 2+i$, akkor

$$\frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2} = \frac{3+2i}{2-i} = \frac{(3+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{6+3i+4i-2}{5} = \frac{4}{5}+\frac{7}{5}i$$

2. Hozza algebrai alakra az alábbi kifejezéseket!

   a, $3\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

   b, $\dfrac{2+i}{i(1-4i)}$

   Megoldás $a)$ $3\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right) = 3\left(-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\dfrac{3}{2}+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}i,$

   $b)$ $\dfrac{2+i}{i(1-4i)} = \dfrac{2+i}{4+i} = \dfrac{(2+i)(4-i)}{(4+i)(4-i)} = \dfrac{8+4i-2i+1}{17} = \dfrac{9}{17}+\dfrac{2}{17}i.$

3. Írjuk fel a következő számok trigonometrikus alakját!

   a, $\sqrt{6}-2i\sqrt{2}$

   b, -4i

   c, 8

   Megoldás $a)$ $\sqrt{6}-\sqrt{2}i = \sqrt{6+2}\left(\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{8}}-\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}i\right) = \sqrt{8}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i\right) = \sqrt{8}\left(\cos\dfrac{11\pi}{6}+i\sin\dfrac{11\pi}{6}\right)$

   $b)$ $-4i = 4\left(\cos\dfrac{3\pi}{2}+i\sin\dfrac{3\pi}{2}\right)$, $c)$ $8 = 8(\cos 0 + i\sin 0)$.

4. Végezzük el a következő gyökvonásokat!

   a, $\sqrt[3]{1}$

b, $\sqrt[4]{-16}$

c, $\sqrt[3]{1+i\sqrt{3}}$

Megoldás

a) $1=\cos 0+i\sin 0$, tehát a 3 harmadik gyök

$$\cos 0+i\sin 0=1,\qquad \cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\qquad \cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

b) $-16=16(\cos\pi+i\sin\pi)$ és $\sqrt[4]{16}=2$, tehát a 4 negyedik gyök:

$$2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}+\sqrt{2}i,\qquad 2\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}+\sqrt{2}i,$$

$$2\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}-\sqrt{2}i,\quad 2\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)=\sqrt{2}-\sqrt{2}i.$$

c) $1+i\sqrt{3}=\sqrt{1+3}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, tehát a harmadik gyökök:

$$\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}\right),\quad \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{9}+i\sin\frac{7\pi}{9}\right),\quad \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{9}+i\sin\frac{13\pi}{9}\right).$$

5. Végezzük el a következő hatványozásokat!

a, $(1+i\sqrt{3})^3$

b, $(1+i)^8$

c, $(1-i)^4$

Megoldás

a) $(1+i\sqrt{3})^3=\left(2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right)^3=8\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)=-8.$

b) $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$, így $(1+i)^8=(\sqrt{2})^8\left(\cos\frac{8\pi}{4}+i\sin\frac{8\pi}{4}\right)=16.$

c) $1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$, így $(1-i)^4=(\sqrt{2})^4\left(\cos 7\pi+i\sin 7\pi\right)=-4.$

6. Oldjuk meg a komplex számok halmazán a $z^2+6z+10=0$ másodfokú egyenletet!

Megoldás

A megoldáshoz helyettesítsünk be a másodfokú egyenlet megoldóképletébe: $\frac{-6\pm\sqrt{36-40}}{2}=\frac{-6\pm\sqrt{-4}}{2}=-3\pm\sqrt{-1}=-3\pm i.$

7. Oldjuk meg a komplex számok halmazán az alábbi egyenleteket!

a, $z^3 = 1 + i$

b, $|z| - z = 1 + 2i$

c, $z^2 = \overline{z}$

d, $2iz^3 = (1 + i)^8$

e, $\dfrac{7i + 3}{7 - 3i} z^4 + 8(\sqrt{3} + i) = 0$

Megoldás *a)* $z^3 = 1 + i$ egyenlet megoldásai $1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ harmadik gyökei, vagyis

$$\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right), \quad \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right), \quad \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right).$$

b) $z = a + bi$ algebrai alakból az $\sqrt{a^2 + b^2} - a - bi = 1 + 2i$ egyenletet kapjuk. A két oldal képzetes része megegyezik, vagyis $b = -2$. Emiatt a valós részekre $\sqrt{a^2 + 4} - a = 1$ adódik, vagyis $a^2 + 4 = a^2 + 2a + 1$, így $a = \frac{3}{2}$, vagyis a megoldás $z = \frac{3}{2} - 2i$.
c) $z = a + bi$ algebrai alakból $a^2 - b^2 + 2abi = a - bi$, vagyis $2ab = -b$, tehát $b = 0$ vagy $a = -\frac{1}{2}$. Ha $b = 0$, akkor $a^2 = a$, tehát $a = 0$ vagy $a = 1$. Ha $a = -\frac{1}{2}$, akkor a valós részekre az $\frac{1}{4} - b^2 = -\frac{1}{2}$ adódik, így $b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Az egyenlet megoldásai: $0, 1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$. *d)* $(1 + i)^8 = 16$, tehát $iz^3 = 8$, így $z^3 = -8i = 8\left(\cos\dfrac{3\pi}{2} + i\sin\dfrac{3\pi}{2}\right)$, vagyis a megoldások a harmadik gyökök:

$$2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2i,$$
$$2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i,$$
$$2\left(\cos\frac{11\pi}{6} + i\sin\frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{3} - i.$$

e) $\dfrac{7i + 3}{7 - 3i} = \dfrac{i(7 - 3i)}{7 - 3i} = i$, vagyis $iz^4 = -8(\sqrt{3} + i)$, tehát

$$z^4 = 8(\sqrt{3}i - 1) = 8 \cdot 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2^4\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right),$$

így a megoldások:

$$2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3} + i, \qquad 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = -1 + \sqrt{3}i$$

$$2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right) = -\sqrt{3} - i, \quad 2\left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right) = 1 - \sqrt{3}i$$

8. Oldja meg az alábbi egyenletet a komplex számok halmazán!

$$z^2 - (3+2i)z + 1 + 3i = 0$$

Megoldás:

Ez egy másodfokú egyenlet, így alkalmazhatjuk a megoldóképletet:

$$z_{1,2} = \frac{3+2i \pm \sqrt{(3+2i)^2 - 4(1+3i)}}{2} =$$

$$\frac{3+2i \pm \sqrt{(9+12i-4) - 4 - 12i)}}{2} = \frac{3+2i \pm \sqrt{1}}{2},$$

azaz a két gyök a $z_1 = 2 + i$ és a $z_2 = 1 + i$.

9. Oldja meg az alábbi egyenletet a komplex számok halmazán!

$$-(1-i)^4 z^2 + 4z + 2 = 0$$

Megoldás: $(1-i)^4$-t kell kiszámítanunk először. Ezt lehet például trigonometrikus alakkal, ekkor

$$(1-i)^4 = \left(\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)\right)\right)^4 = 4(\cos(7\pi) + i\sin(7\pi)) = -4 + 0i$$

Innen a megoldandó egyenlet:

$$4z^2 + 4z + 2 = 0$$

Ennek a gyökeit megkaphatjuk a másodfokú megoldóképlet segítségével:

$$z_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-32}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{-1}}{2}$$

Mivel az -1-nek két négyzetgyöke van a komplex számok halmazán, a $\pm i$, így két megoldás van a $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ és a $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.

10. Oldja meg az alábbi egyenletet a komplex számok halmazán!

$$(1+i)^4 z^2 + i = 0$$

Megoldás Mivel

$$(1+i)^4 = \left(\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\right)^4 = 4(\cos(\pi) + i\sin(\pi)) = -4,$$

így a megoldandó egyenlet:

$$-4z^2 + i = 0,$$

azaz

$$z^2 = \frac{-i}{-4} = \frac{1}{4}i = \frac{1}{4}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

Innen négyzetgyököt vonva kapjuk a két megoldást:

$$z_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + k\pi\right)\right) \quad k = 0, 1$$

Azaz:

$$z_1 = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}i$$

$$z_2 = \frac{1}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \pi\right)\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4}i$$

11. Oldja meg az alábbi egyenletet a komplex számok halmazán!

$$-2iz^3 = 16$$

Megoldás: Átosztva $-2i$-vel:

$$z^3 = \frac{16}{-2i} = \frac{16}{-2i}\frac{i}{i} = 8i.$$

Azaz az egyenlet megoldásai a $8i$ szám köbgyökei. Ezek kiszámításához írjuk át trigonometrikus alakba $8i$-t:

$$8i = 8\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Innen a köbgyököket a

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right), \quad k = 0, 1, \ldots n-1$$

képletből nyerhetjük n helyébe hármat helyettesítve, így

$$z_{1,2,3} = \sqrt[3]{8}\left(\cos\left(\frac{\pi/2 + 2k\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi/2 + 2k\pi}{3}\right)\right), \quad k = 0, 1, 2$$

$$z_1 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sqrt{3} + i$$

$$z_2 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{2}\right)\right) = 2\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = -\sqrt{3} + i$$

$$z_3 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{2}\right)\right) = 2\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right) = -2i$$

12. Oldja meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán!

$$\overline{z} + 3|z|^2 + 2i = 5$$

Megoldás: Át kell írnunk az egyenletet algebrai alakba, így ha $z = a + ib$, akkor

$$\begin{aligned} a - ib + 3\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 + 2i &= 5 \\ a - ib + 3(a^2+b^2) + 2i &= 5 \\ a + 3(a^2+b^2) + i(-b) &= 5 - 2i \end{aligned}$$

Innen a valós részre vonatkozó egyenlet: $a+3(a^2+b^2) = 5$, a képzetes részre vonatkozó : $-b = -2$. Azaz $b = 2$, ezt visszaírva a valós részre vonatkozó egyenletbe: $a + 3a^2 + 12 = 5$, azaz $3a^2 + a + 7 = 0$. Ez utóbbi másodfokú egyenlet diszkriminánsa -83, azaz nincs megoldás a valós számok körében. Mivel a egy komplex szám valós része, így mindenképpen valósnak kell lennie, így azt kaptunk, hogy az eredeti egyenletnek nincsen megoldása a komplex számok körében.

13. Oldja meg az alábbi egyenletet a komplex számok halmazán!

$$z^2 + 2|z|^2 + \overline{z}^2 = 0$$

Megoldás:

Írjuk fel z-t $z = a + ib$ algebrai alakban, ekkor:

$$(a+ib)^2 + 2\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2 + (a-ib)^2 = 0$$

$$a^2 + 2aib - b^2 + 2(a^2+b^2) + a^2 - 2aib - b^2 = 0$$

Ekkor a képzetes rész a baloldalon kiesik, így minden a, b párra igaz lesz a képzetes részekre vonatkozó $0 = 0$ egyenlet. A valós részre vonatkozó egyenlet:

$$a^2(1+2+1) + b^2(-1+2-1) = 4a^2 = 0$$

Ennek egyetlen valós megoldása az $a = 0$. Így azt kapjuk, hogy az egyenletet kielégíti minden olyan komplex szám, amelynek valós része 0, képzetes része pedig tetszőleges, azaz ha $t \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós paraméter, akkor $z = it$ megoldása az eredeti egyenletnek.

3.2. További gyakorlófeladatok

1. Határozza meg az alábbi kifejezések pontos értékét!

a, $\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

b, $\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

c, $\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)$

d, $\sin\left(\frac{5\pi}{2}\right)$

2. Milyen szöget zár be a $(-1, 1)$ pontba mutató vektor az x tengely pozitív felével? Milyen távolságra van a pont az origótól?

3. Határozza meg a $\dfrac{5-2i}{3+4i}$ szám algebrai alakját!

4. Hozza algebrai alakba a $4\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)$ trigonometrikus alakban adott komplex számot! Mi lesz a szám valós része? Mi lesz a képzetes része? Mi lesz az abszolút értéke? Mi lesz a szám szöge? Mi lesz a konjugáltjának algebrai alakja?

5. Számítsa ki az $(1-\sqrt{3}i)^{2018}$ szám algebrai alakját!

6. Oldja meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán!

   a, $(1+i)^2z^2 + z + i = 0$

   b, $4z^2 + 4z + 2 = 0$

   c, $(1+i)^8z^2 + z + 16 = 0$

   d, $(1+i)^2z^2 + z + i = 0$

   e, $9z^2 + 6z + 2 = 0$

7. Oldja meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán!

   a, $z^4 + i - \sqrt{3} = 0$

   b, $-2z^3 = i$

   c, $8z^3 = -1$

8. Oldja meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán!

   a, $|z| + z + \overline{z} = 3i$

   b, $|z|^2 + 2\overline{z} = 1 - 2i$

4. Függvények határértéke

4.1. Kidolgozott mintapéldák

1. Számítsa ki az alábbi határértéket!

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^2 - 3x + 2}$$

Megoldás:

Mivel behelyettesítés után a tört a 2-ben $\frac{0}{0}$ alakú, így szorzatra bontunk:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-4x^2+4x}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{x(x^2-4x+4)}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)^2}{(x-2)(x-1)}=\lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)}{x-1},$$

Ez utóbbi alak már folytonos a 2-ben, mert folytonos függvények hányadosa, így behelyettesítéssel azt kapjuk, hogy a határérték 0.

2. Számítsa ki az alábbi függvény határértékét!

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x\sin(x)}$$

Megoldás:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x\sin(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x\sin(x)}\frac{\cos(x)+1}{\cos(x)+1}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2(x)-1}{x\sin(x)(1+\cos(x))}=$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2(x)}{x\sin(x)(1+\cos(x))}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin(x)}{x}\frac{1}{1+\cos(x)}=-1\cdot 1\cdot\frac{1}{1+1}=-\frac{1}{2}$$

3. Határozza meg az alábbi függvény folytonossági pontjait, szakadási pontjait és azok típusát!

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+2}{4x^2+4x+1} & \text{ha } x<0\\[2ex] \sqrt{x^2+5x+4} & \text{ha } x\geq 0\end{cases}$$

Megoldás

Meg kell vizsgálnunk az illesztési pont, a negatív x-ekre a nevező gyökeit és $x\geq 0$-re, hogy a négyzetgyök alatt szerepel-e negatív szám.

$$x^2+5x+4=(x+1)(x+4)\geq 0$$

A gyöktényező alakból látszik, hogy a két gyök a -1 és a -4, és mivel x^2 együtthatója pozitív, így ez egy felfelé nyíló parabola. Tehát x^2+5x+4 negatív ha $x\in(-4,-1)$, egyébként nemnegatív értékeket vesz fel. Tehát minden pozitív x-re pozitív, így a négyzetgyök az összes $x>0$-re értelmezett és folytonos. (Egyszerűbben: x^2+5x+4 tagonként pozitív, ha x pozitív.)

$$4x^2+4x+1=(2x+1)^2=0$$

Ezen egyenlet egyetlen megoldása az $x = -\frac{1}{2}$, itt

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x\to-\frac{1}{2}} \frac{x+2}{4x^2+4x+1} = \lim_{x\to-\frac{1}{2}} \frac{\overbrace{x+2}^{\frac{3}{2}}}{\underbrace{(2x+1)^2}_{\to 0+}} = +\infty$$

Ezért ebben a pontban a függvénynek lényeges szakadása van.

Végül az illesztési pontban:

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{x+2}{4x^2+4x+1} = \frac{0+2}{0+0+1} = 2$$

és

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \sqrt{x^2+5x+4} = \sqrt{0+0+4} = 2$$

Mivel $f(0) = \sqrt{0+0+4} = 2$ ami egyben a jobb és bal limesz is, ezért ebben a pontban a függvény folytonos.

Azaz $f(x)$ folytonos $\mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$-en.

4. Határozza meg az alábbi függvény folytonossági pontjait, szakadási pontjait és azok típusát!

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2+x-2} + 2 & \text{ha } x < 0 \\ \frac{x^2}{x^2+2x+2} & \text{ha } x \geq 0 \end{cases}$$

Megoldás:

Folytonos függvények kompozíciója is folytonos, így a függvénynek csak az illesztési pontban és a nevezők gyökeiben lehet szakadása, a többi pontban folytonos. $x^2+x-2 = (x-1)(x+2)$, innen csak $x = -2$ negatív szám, az $x = 1$ nem jelent problémát, mert abban a pontban más a függvény definíciója. Másrészt x^2+2x+2-nek nincsen gyöke, mert a diszkrimináns negatív. Azaz a vizsgálandó pontok: $x = 0$ és $x = -2$.

Ha $x = -2$, akkor

$$\lim_{x\to-2+} f(x) = \lim_{x\to-2+} \frac{x-1}{x^2+x-2} + 2 = \lim_{x\to-2+} \frac{x-1}{(x-1)(x+2)} + 2 = \lim_{x\to-2+} \frac{\overbrace{1}^{\to 1}}{\underbrace{x+2}_{\to 0+}} + 2 = \infty$$

(Az utolsó előtti egyenlőség csak $x \neq 1$ esetén igaz, de a határérték számításakor csak a -2 környezeteit vizsgáljuk, így feltehető, hogy $x \neq 1$.) Mivel ezen határérték jobbról ∞, így függetlenül a bal határértéktől a függvénynek lényeges szakadása van az $x = -2$ pontban.

Ha $x = 0$, akkor

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{x^2}{x^2+2x+2} = \frac{0}{0+0+2} = 0$$

és

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \frac{x-1}{x^2+x-2} + 2 = \frac{0-1}{0+0-2} + 2 = \frac{5}{2},$$

így a függvénynek véges ugrása van az $x = 0$ pontban.

5. Határozza meg az alábbi függvény folytonossági pontjait, szakadási pontjait és azok típusát!

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4x+1}{2x-3} & \text{ha } x \le 0 \\[2ex] \dfrac{\cos(\sqrt{x})-1}{\sin(x)} & \text{ha } 0 < x < 1 \\[2ex] 0 & \text{ha } x \ge 1 \end{cases}$$

Megoldás: Folytonos függvények kompozíciója is folytonos, így a függvénynek csak az illesztési pontban és a nevezők gyökeiben lehet szakadása, a többi pontban folytonos. $2x-3$-ból $x = \frac{2}{3}$, de ezt a pontot nem kell vizsgálni, mert csak negatív x-re él ez a definíció. $\sin(x) = 0$-nak egyetlen megoldása van, az $[0,1]$ intervallumon, az $x = 0$. Így a vizsgálandó pontok az $x = 0$ és az $x = 1$.

Ha $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\cos(\sqrt{x})-1}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0+} \frac{\cos(\sqrt{x})-1}{\sin(x)} \frac{\cos(\sqrt{x})+1}{\cos(\sqrt{x})+1} =$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{\cos^2(\sqrt{x})-1}{\sin(x)(\cos(\sqrt{x})+1)} = \lim_{x\to 0+} \frac{-\sin^2(\sqrt{x})}{\sin(x)(\cos(\sqrt{x})+1)} =$$

$$\lim_{x\to 0+} \frac{-\sin^2(\sqrt{x})}{(\sqrt{x})^2} (\sqrt{x})^2 \frac{1}{x} \frac{x}{\sin(x)} \frac{1}{(\cos(\sqrt{x})+1)} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

másrészt:

$$\lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{4x+1}{2x-3} = -\frac{1}{3},$$

mert a tört folytonos 0-ban. Mivel létezik a baloldali és jobboldali határérték is, és mindkettő véges de nem egyenlőek, így $x = 0$-ben véges ugrása van a függvénynek.

Ha $x = 1$:

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} \frac{\cos(\sqrt{x})-1}{\sin(x)} = \frac{\cos(1)-1}{\sin(1)}$$

Itt és létezik mindenkét oldali határérték és végesek. De nem egyenlő a kettő, mert $\cos(x)$-nek nem gyöke az 1, így $x=1$-ben is véges ugrás van.

6. Határozza meg az alábbi határértéket amennyiben létezik!

$$\lim_{x\to 1} \frac{|x^2-1|}{x-1}$$

Megoldás

$$\lim_{x\to 1} \frac{|x^2-1|}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{|(x-1)(x+1)|}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{|x-1||x+1|}{x-1},$$

Egyrészt $\lim\limits_{x\to 1} |x+1| = 2$.

Másrészt viszont mivel $|x| = -x$, ha $x<0$ és $|x| = x$, ha $x \geq 0$ így

$$\lim_{x\to 1+} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x\to 1+} \frac{x-1}{x-1} = 1$$

és

$$\lim_{x\to 1-} \frac{|x-1|}{x-1} = \lim_{x\to 1-} \frac{-(x-1)}{x-1} = -1,$$

így

$$\lim_{x\to 1+} \frac{|x^2-1|}{x-1} = 2$$

és

$$\lim_{x\to 1-} \frac{|x^2-1|}{x-1} = -2,$$

tehát a keresett limesz nem létezik.

4.2. További gyakorlófeladatok

1. Számítsa ki az alábbi határértékeket!

a, $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^2-3x-4}{(x^2-1)^2}$

b, $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-3x-4}{(x^2-1)^2}$

c, $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{x^2+3x-10}{(x^2-4)^2}$

d, $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2+3x-10}{(x^2-4)^2}$

e, $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2+3x-10}{(x^2-4)^2}$

f, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2+3x-10}{(x^2-4)^2}$

g, $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{2x^5-3x^2+1}{x^7+4x^3+5}$

h, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{2x^5-3x^2+1}{x^7+4x^3+5}$

i, $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-4x+4}{(x^2-4)^2}$

j, $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{x^2-4x+4}{(x^2-4)^2}$

k, $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^2-4x+4}{(x^2-4)^2}$

2. Számítsa ki az alábbi határértékeket!

a, $\lim\limits_{x \to -\infty} x\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-3}\right)$

b, $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{3x^2+1}-2x}$

3. Számítsa ki az alábbi határértékeket!

a, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(\sqrt[3]{x})-1}{\sin(3x)}$

b, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(5x^2)}{\tan(3x^2)}$

c, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos(9x^2)}{x^2}$

d, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(2\sqrt[5]{x})-1}{\sin(\sqrt[3]{x})}$

e, $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(2x)-1}{\tan(3x)}$

4. Számítsa ki az alábbi határértékeket!

a, $\lim\limits_{x \to 2-} [2x+3]$ ([x]: egész rész függvény)

b, $\lim\limits_{x \to 2+} [2x+3]$

c, $\lim\limits_{x\to 3+} 2+5\{x\}$

d, $\lim\limits_{x\to 3-} 2+5\{x\}$

e, $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{|x+1|}{x+1}$

5. Hol és milyen típusú szakadásai vannak az alábbi függvényeknek?

a, $f(x) = \dfrac{x^3+x^2-5x+3}{x^2(x+3)}$

b, $g(x) = \dfrac{x^4-3x^3}{|2x^2-6x|}$

c, $h(x) = \dfrac{\sin(x-2)}{(x^2+4)\sqrt{x^2-4x+4}}$

6. Határozza meg az alábbi függvény szakadási pontjait és azok típusát!

$$f(x) = \begin{cases} 3 & \text{ha } x \le -1 \\ \dfrac{-1}{x}+2 & \text{ha } -1 < x < 0 \\ \dfrac{3}{7} & \text{ha } x = 0 \\ \dfrac{\sin(3x)}{7x} & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

7. Határozza meg az alábbi függvény szakadási pontjait és azok típusát!

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)\sin(x)}{x} & \text{ha } x \le 0 \\ \dfrac{2x^2-6x-8}{x^2-4x-5} & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

8. Határozza meg az alábbi függvény szakadási pontjait és azok típusát!

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|4-x|} + \dfrac{1}{4-x}, & \text{ha } x \ge 2 \\ \dfrac{x^2-10x}{x^2-11x+10}, & \text{ha } x < 2 \end{cases}$$

5. Egyváltozós függvények deriválása

5.1. Kidolgozott mintapéldák

1. Számítsa ki az alábbi függvény deriváltját!

$$f(x) = \left(\mathrm{e}^{7x} + 2x^2 + 1\right)^3$$

Megoldás

$$f'(x) = \left(\left(\mathrm{e}^{7x} + 2x^2 + 1\right)^3\right)' = 3\left(\mathrm{e}^{7x} + 2x^2 + 1\right)^2 (7\,\mathrm{e}^{7x} + 4x + 0)$$

2. Számítsa ki az alábbi függvény deriváltját!

$$f(x) = (x + \cosh(7x^3) + 4)^5$$

Megoldás

$$f'(x) = 5(x + \cosh(7x^3) + 4)^4(1 + \sinh(7x^3) \cdot 7 \cdot 3 \cdot x^2 + 0)$$

3. Számítsa ki az alábbi függvény deriváltját!

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^3 + 1}}{x + 2}$$

Megoldás

Mivel $\sqrt{x^3 + 1} = (x^2 + 1)^{\frac{1}{2}}$, így

$$f'(x) = \left(\frac{\sqrt{x^3 + 1}}{x + 2}\right)' = \frac{\frac{1}{2}(x^3 + 1)^{-\frac{1}{2}}(3x^2 + 0)(x + 2) - \sqrt{x^3 + 1} \cdot 1}{(x + 2)^2}$$

4. Számítsa ki az alábbi függvények deriváltját!

$$f(x) = \frac{x^2 - 2}{\sinh(x) + 3}$$

Megoldás:

$$f'(x) = \frac{2x(\sinh(x) + 3) - (x^2 - 2)\cosh(x)}{(\sinh(x) + 3)^2}$$

5. Határozza meg az alábbi függvény érintőegyenesének egyenletét az $x_0 = 1$ pontban!

$$f(x) = 3\arcsin(1-x) + 8$$

Megoldás: Az érintőegyenes egyenlete x_0-ban:

$$y_e = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Ehhez $f(x_0) = f(1) = 3\arcsin(1-1) + 8 = 3\arcsin(0) + 8 = 8$, illetve

$$f'(x) = 3\frac{-1}{\sqrt{1-(1-x)^2}}$$

Innen $f'(1) = -3$, azaz a keresett egyenes egyenlete: $y_e = -3(x-1) + 8 = -3x + 11$.

6. Határozza meg az alábbi határértéket!

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{2x^2} - 1}{\sin(3x)}$$

Megoldás:
Mivel $\sin(0) = 0$ és $\mathrm{e}^0 = 1$ ezért ez a 0-ban egy $\frac{0}{0}$ alakú határérték, így alkalmazható a L'Hospital-szabály, innen:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e}^{2x^2} - 1}{\sin(3x)} =^{L'H} \lim_{x\to 0} \frac{4x\,\mathrm{e}^{2x^2}}{3\cos(3x)}$$

mivel $e^0 = 1$ és $\cos(0) = 1$, így a keresett határérték: $\dfrac{4\cdot 0\cdot 1}{3\cdot 1} = 0$.

7. Határozza meg az alábbi határértéket!

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arsinh}(2x)}{\arctan(3x)}$$

Megoldás:
Mivel $\operatorname{arsinh}(0) = 0$ és $\arctan(0) = 0$ ezért ez a 0-ban egy $\frac{0}{0}$ alakú határérték, így alkalmazható a L'Hospital-szabály, innen:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arsinh}(2x)}{\arctan(3x)} =^{L'H} \lim_{x\to 0} \frac{\dfrac{2}{\sqrt{1+(2x)^2}}}{\dfrac{3}{1+(3x)^2}} = \frac{2}{3}$$

8. Határozza meg az alábbi határértéket!

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cosh(2x) - 1}{\tan(x)}$$

Megoldás:

Mivel $\cosh(0) = 1$ és $\tan(0) = 0$ ez egy $\dfrac{0}{0}$ alakú határérték, így alkalmazható a L'Hospital-szabály, így:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cosh(2x) - 1}{\tan(x)} =^{L'H} \lim_{x\to 0} \frac{2\sinh(2x)}{1 + \tan^2(x)} = \frac{2\cdot 0}{1+0} = 0,$$

hiszen $\sinh(0) = 0$.

9. Számítsa ki az alábbi határértéket, amennyiben létezik!

$$\lim_{x\to 0+} \sin(x)^{\tan(x)}$$

Megoldás:

$$\lim_{x\to 0+} \sin(x)^{\tan(x)} = \lim_{x\to 0+} \mathrm{e}^{\ln\left(\sin(x)^{\tan(x)}\right)} = \lim_{x\to 0+} \mathrm{e}^{\tan(x)\ln(\sin(x))}$$

Az e^x függvény folytonossága miatt elegendő a kitevő határértékét kiszámítani, majd a kapott határértéket visszahelyettesíteni a kitevőbe. A kitevő egy $0\cdot\infty$ alakú szorzat a 0-ban, így átalakítva:

$$\lim_{x\to 0+} \tan(x)\ln(\sin(x)) = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln(\sin(x))}{\mathrm{cotan}(x)} =^{L'H} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{\cos(x)}{\sin(x)}}{\frac{-1}{\sin^2(x)}} = \lim_{x\to 0+} -\cos(x)\sin(x) = 0,$$

innen az eredeti határérték: $\mathrm{e}^0 = 1$.

10. Számítsa ki az $f(x) = (x+2)\,\mathrm{e}^{x^2-1}$ függvény minimumát és maximumát a $[0,1]$ intervallumon, amennyiben létezik!

Megoldás: Biztosan létezik maximuma és minimuma, mert $f(x)$ folytonos függvények szorzata, tehát folytonos, és Weierstrass-tétele szerint folytonos függvény korlátos és zárt intervallumon felveszi a maximumát és minimumát.

A vizsgálandó pontok az intervallum két széle és a lokális szélsőértékhelyek, ez utóbbihoz a derivált gyökeit kell kiszámolnunk.

$$f'(x) = \mathrm{e}^{x^2-1} + (x+2)2x\,\mathrm{e}^{x^2-1} = (2x^2+4x+1)\,\mathrm{e}^{x^2-1}$$

Mivel $\mathrm{e}^y > 0$ minden $y \in \mathbb{R}$-re, így a derivált előjele csak a $2x^2 + 4x + 1$ kifejezés előjelén múlik. Ez egy felfelé nyíló parabola, a gyökeit a másodfokú egyenlet megoldóképletéből kaphatjuk:

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-8}}{4} = -1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Mivel $\frac{\sqrt{2}}{2} < 1$, így mindkét gyök negatív, tehát nincsen lokális szélsőérték $[0, 1]$-en, továbbá $f'(x) > 0$ ezen intervallumon a függvény tehát szigorú monoton nő. Innen a vizsgálandó pontok: 0, és 1, itt a függvényértékek:

$f(0) = 2\,\mathrm{e}^{-1} = \frac{2}{\mathrm{e}}$, $f(1) = 3\,\mathrm{e}^0 = 3$. Innen a minimum 0-ban van, értéke $\frac{2}{\mathrm{e}}$, a maximum pedig 1-ben, értéke 3. Onnan tudjuk, hogy 0-ban felvett érték kisebb mint az 1-ben felvett érték, hogy a függvény szigorú monoton nő ezen az intervallumon (vagy onnan, hogy $\mathrm{e} > 2$, így $\frac{2}{\mathrm{e}} < 1 < 3$)

11. Hol van inflexiós pontja az $f(x) = \mathrm{e}^{-2x}(x^2 - 3x + 4)$ függvénynek?

Megoldás:

A konvexitás vizsgálatához a második deriváltat kell kiszámítanunk, így

$$f'(x) = -2\,\mathrm{e}^{-2x}(x^2 - 3x + 4) + \mathrm{e}^{-2x}(2x - 3) = e^{-2x}(-2x^2 + 6x - 8 + 2x - 3) =$$

$$\mathrm{e}^{-2x}(-2x^2 + 8x - 11),$$

innen inflexiós pont ott lehet, ahol

$$f''(x) = -2\,\mathrm{e}^{-2x}(-2x^2+8x-11)+\mathrm{e}^{-2x}(-4x+8) = \mathrm{e}^{-2x}(4x^2-16x+22-4x+8) =$$

$$\mathrm{e}^{-2x}(4x^2 - 20x + 30) = 0$$

Mivel e^x pozitív minden valós x-re, az $4x^2 - 20x + 30 = 0$ egyenletet kell megoldanunk, azaz $2x^2 - 10x + 15 = 0$-t. Innen

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 120}}{4} = \frac{10 \pm \sqrt{-20}}{4} =$$

mivel ennek az egyenletnek nincsen valós gyöke, így a függvénynek nincs inflexiós pontja.

12. Adja meg azon legbővebb nyílt intervallumokat, amelyeken az $f(x) = x + \frac{16}{x}$ függvény szigorú monoton! Van-e a függvénynek inflexiós pontja?

Megoldás:

Ehhez először is a függvény értelmezési tartományát kell meghatároznunk. $f(x)$ a nevező gyökeinek kivételével értelmezett, azaz $\mathbb{R} \setminus \{0\}$-n. A monotonitást az első derivált segítségével vizsgálhatjuk, ehhez:

$$f'(x) = 1 - \frac{16}{x^2} = \frac{x^2-16}{x^2} = \frac{1}{x^2}(x^2-16) \qquad x \neq 0$$

Mivel $\dfrac{1}{x^2} > 0$ minden $x \in D_f$-re, így csak $x^2 - 16$ előjelén múlik a derivált előjele. Ez egy felfelé nyíló parabola, amely a két gyöke között negatív, így

$x^2 - 16 = (x-4)(x+4)$-ből, $f'(x) > 0$ ha $x \in (-\infty, -4)$ illetve $x \in (4, \infty)$, ezen két intervallumon a függvény szigorú monoton nő. Másrészt a két gyök között negatív a derivált, így a függvény szigorú monoton csökken $(-4, 0)$-n és $(0, 4)$-en.

Inflexiós pontja csak ott lehet a függvénynek ahol konvexitást vált, ehhez $f''(x) = 0$ szükséges feltétel (ha kétszer deriválható a függvény). Így

$$f''(x) = \frac{32}{x^3} \qquad x \neq 0$$

Mivel egy tört csak akkor lehet 0, ha a számlálója 0, így a második derivált sehol sem 0, tehát a függvénynek nincsen inflexiós pontja.

13. Határozza meg a $g(x) = \pi - \arccos(3-2x)$ függvény értelmezési tartományát és értekkészletét!

Megoldás: Tudjuk, hogy arccos értelmezési tartománya a $[-1, 1]$ zárt intervallum, innen

$$-1 \leq 3 - 2x \leq 1$$

adódik $g(x)$-re. Megoldva:

$$-4 \leq -2x \ \leq -2$$

$$2 \geq x \geq 1,$$

azaz $g(x)$ értelmezési tartománya $[1, 2]$.

Értékkészletének meghatározásához $g(x)$ monotonitását kell megvizsgálnunk:

$$g'(x) = 0 - \frac{-1}{\sqrt{1-(3-2x)^2}}(-2) = \frac{-2}{\sqrt{1-(3-2x)^2}}$$

Mivel a teljes értelmezési tartományon $|3-2x| \leq 1$, így a derivált az értelmezési tartomány két végpontja kivételével értelmezett (ott $|3-2x| = 1$) és mindenütt negatív, ugyanis $\sqrt{y}$ mindenhol nemnegatív. Innen azt kapjuk, hogy a függvény a teljes értelmezési tartományán szigorú monoton csökken, azaz az értékkészlet:

$$[g(2), g(1)] = [\pi - \arccos(3-4), \pi - \arccos(3-2)] = [\pi - \pi, \pi - 0] = [0, \pi].$$

14. Legyen $f(x) = 3\arcsin(3-2x)+\pi$. D_f =? R_f =? Indokolja meg, hogy miért invertálható $f(x)$! $D_{f^{-1}}$ =?, $R_{f^{-1}}$ =?

Megoldás:

$\arcsin(x)$ értelmezési tartománya a $[-1,1]$ intervallum, innen

$$-1 \leq 3-2x \leq 1$$

$$-4 \leq -2x \leq -2$$

$$2 \geq x \geq 1,$$

azaz $D_f = [1,2]$. Másrészt $\arcsin(x)$ felvesz minden $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ közötti számot amint x végigfut a teljes értelmezési tartományon. Így $\arcsin(3-2x)$ is, innen $f(x)$ értékkészlete $\left[-3\frac{\pi}{2}+\pi, 3\frac{\pi}{2}+\pi\right] = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$.

Egy folytonos függvény pontosan akkor invertálható, ha szigorúan monoton. Mivel

$$f'(x) = 3\frac{-2}{\sqrt{1-(3-2x)^2}} < 0 \qquad x \in (1,2)$$

így $f(x)$ szigorú monoton csökken, a teljes értelmezési tartományán, tehát invertálható. Továbbá $D_{f^{-1}} = R_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right]$ és $R_{f^{-1}} = D_f = [1,2]$.

15. Határozza meg az $h(x) = \sinh(x)$ függvény 0 körüli negyedrendű Taylor-polinomját!

Megoldás: Definíció szerint a 0 körüli 4-edrendű Taylor polinom:

$$T_4(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(iv)}(0)}{4!}x^4$$

Azaz $h(x)$ deriváltjait kell kiszámítani 0-ban negyedrendig.

$h(x) = \sinh(x)$, innen $h(0) = \sinh(0) = 0$.

$h'(x) = \cosh(x)$, innen $h'(0) = \cosh(0) = 1$.

$h''(x) = \sinh(x)$, innen $h''(0) = \sinh(0) = 0$.

$h'''(x) = \cosh(x)$, innen $h'''(0) = \cosh(0) = 1$.

$h^{(iv)}(x) = \sinh(x)$, innen $h^{(iv)}(0) = \sinh(0) = 0$.

Azaz a keresett Taylor-polinom:

$$T_4(x) = x + \frac{x^3}{6}$$

5.2. További gyakorlófeladatok

1. Határozza meg az alábbi függvények deriváltját definíció szerint az $x_0 = 1$ pontban, majd írja fel itt az érintőegyenes egyenletét!

$$f(x) = \sqrt{5 - x^2}$$

$$g(x) = \frac{1}{2 - x}$$

2. Hol deriválható az alábbi függvény? Számítsa ki a deriváltat minden olyan pontban ahol létezik!

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{(x-1)\sin(x)}{x} & \text{ha } x \leq 0 \\[2ex] \dfrac{2x^2 - 6x + 8}{x^2 - 4x + 5} & \text{ha } x > 0 \end{cases}$$

3. Számítsa ki az alábbi függvények deriváltját!

   a, $(x+2)^2\sqrt{3x^3 + x^2}$

   b, $(x^4 + \cos^2(2x))^6$

   c, $\mathrm{e}^{\sinh(x)}$

   d, $\cosh(x)^{\sinh(x)}$

   e, $\dfrac{\operatorname{arsinh}(x^2)}{\arccos^2(2x)}$

4. Végezzen teljes függvényvizsgálatot az alábbi függvényeken! Van-e ezen függvényeknek abszolút szélsőértéke a $[0, 1]$ intervallumon? Ha igen számítsa is ki!

   a, $\ln(\sqrt{x^2 - 5x + 6})$

   b, $(x^2 - 2x + 2)\,\mathrm{e}^{-x}$

   c, $x^4 + \dfrac{48}{x}$

5. Mekkora hibát vétünk, ha a $\sinh(0.2)$ értékét a függvény 0 körüli harmadrendű Taylor-polinom helyettesítési értékével közelítjük?

6. Számítsa ki az alábbi határértékeket!

   a, $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin(x^2)}{\arctan(2x^2)}$

   b, $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x\,\mathrm{e}^{-2x^2}$

c, $\lim\limits_{x\to 0+} \sqrt[3]{x}\ln(2x)$

d, $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{\mathrm{e}^x - 1} - \dfrac{1}{x}\right)$

e, $\lim\limits_{x\to 0+} \cosh(x)^{\dfrac{1}{\sinh(2x)}}$

f, $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{9x} - 2\,\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{9x} + \mathrm{e}^{-x}}$

g, $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{\sinh(4x-1)}{\cosh(2x-5)}$

7. Legyen $f(x) = \operatorname{arsinh}(3x-2)$. $D_f =?$, $R_f =?$.

   Írja fel az $x = \dfrac{2}{3}$ pontbeli érintőegyenes egyenletét!

   Indokolja meg, hogy létezik $f^{-1}(x)$! $f^{-1}(x) =?$, $D_{f^{-1}} =?$, $R_{f^{-1}} =?$

6. Egyváltozós függvények integrálása

6.1. Kidolgozott mintapéldák

1. Számítsa ki az alábbi integrált!

$$\int \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1}\mathrm{d}x$$

Megoldás:

Az integrál $\dfrac{f'}{f}$ alakú így közvetlenül

$$\int \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x + 1} = \ln|\,\mathrm{e}^x + 1| + C,$$

ahol $C \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós konstans.

2. Számítsa ki az alábbi határozatlan integrált!

$$\int \frac{3x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}}\mathrm{d}x$$

Megoldás:

$$\int \frac{3x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}}\mathrm{d}x = \frac{3}{2}\int \frac{2x+2}{\sqrt{x^2+2x+2}}\mathrm{d}x =$$

$$\frac{3}{2}\int (2x+2)(x^2+2x+2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x = 3\sqrt{x^2+2x+2}+C,$$

ahol $C \in \mathbb{R}$ egy tetszőleges valós konstans.

3. Számítsa ki az alábbi integrált!

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{|5x-1|}\,\mathrm{d}x$$

Megoldás: Az integrál kiszámításához fel kell bontanunk az abszolút értéket. Ehhez: $5x-1>0$ ha $x>\frac{1}{5}$, innen

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{|5x-1|}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{1}{5}} \mathrm{e}^{-5x+1}\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{1}{5}}^1 \mathrm{e}^{5x-1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\mathrm{e}^{-5x+1}}{-5}\right]_0^{\frac{1}{5}} + \left[\frac{\mathrm{e}^{5x-1}}{5}\right]_{\frac{1}{5}}^1 =$$

$$\frac{1}{-5} - \frac{\mathrm{e}^{-1}}{-5} + \frac{\mathrm{e}^4}{5} - \frac{1}{5}.$$

4. Számítsa ki az alábbi integrált!

$$\int_0^1 (3x-2)\,\mathrm{e}^{5x-1}\,\mathrm{d}x$$

Megoldás:

$\int\limits_0^1 (3x-2)\,\mathrm{e}^{5x-1}\,\mathrm{d}x$ kiszámításához parciális integrálást kell alkalmaznunk. Legyen $f=3x-2$ és $g'=\mathrm{e}^{5x-1}$ ekkor $f'=3$ és $g=\dfrac{\mathrm{e}^{5x-1}}{5}$. Innen:

$$\int_0^1 \overbrace{(3x-2)}^{g}\overbrace{\mathrm{e}^{5x-1}}^{f'}\,\mathrm{d}x = \left[\overbrace{(3x-2)}^{g}\overbrace{\frac{\mathrm{e}^{5x-1}}{5}}^{f}\right]_0^1 - \int_0^1 \overbrace{3}^{g'}\overbrace{\frac{\mathrm{e}^{5x-1}}{5}}^{f}\,\mathrm{d}x =$$

$$\frac{\mathrm{e}^4}{5} + 2\frac{\mathrm{e}^{-1}}{5} - \frac{3}{5}\left[\frac{\mathrm{e}^{5x-1}}{5}\right]_0^1 = \frac{\mathrm{e}^4}{5} + 2\frac{\mathrm{e}^{-1}}{5} - \frac{3\,\mathrm{e}^4}{25} + \frac{3\,\mathrm{e}^{-1}}{25}$$

5. Számítsa ki az alábbi integrált!

$$\int x^3 \ln(4x)\mathrm{d}x$$

Megoldás: $\int x^3 \ln(4x)\mathrm{d}x$ kiszámításához parciálisan kell integrálunk, ehhez legyen $f' = x^3$ innen $f = \dfrac{x^4}{4}$ illetve $g = \ln(4x)$ innen $g' = \dfrac{1}{x}$. Azaz:

$$\int x^3 \ln(4x)\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4}\ln(4x) - \int \overbrace{\frac{x^4}{4}\frac{1}{x}}^{\frac{x^3}{4}}\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4}\ln(4x) - \frac{x^4}{16} + C,$$

ahol C egy tetszőleges valós konstans.

6. Számítsa ki az alábbi integrálokat!

$$\int 2x\arctan(x)\mathrm{d}x \qquad\qquad \int_0^1 2x\arctan(x)\mathrm{d}x$$

Megoldás Parciális integrálással dolgozunk. Legyen $f' = 2x$, innen $f = x^2$ és $g = \arctan(x)$, innen $g' = \frac{1}{1+x^2}$. Azaz:

$$\int \overbrace{2x}^{f'}\overbrace{\arctan(x)}^{g}\mathrm{d}x = \overbrace{x^2}^{f}\overbrace{\arctan(x)}^{g} - \int \overbrace{x^2}^{f}\overbrace{\frac{1}{1+x^2}}^{g'}\mathrm{d}x = x^2\arctan(x) - \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\mathrm{d}x =$$

$$x^2\arctan(x) - \int 1 + \frac{-1}{1+x^2}\mathrm{d}x = x^2\arctan(x) - x + \arctan(x) + C,$$

ahol $C \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans.

A Newton-Leibniz formula szerint

$$\int_0^1 2x\arctan(x)\mathrm{d}x = \left[x^2\arctan(x) - x + \arctan(x)\right]_0^1 =$$

$$\arctan(1) - 1 + \arctan(1) - 0 = \frac{\pi}{4} - 1 + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - 1$$

7. Számítsa ki az alábbi integrált a $t = \mathrm{e}^x$ helyettesítés segítségével!

$$\int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x + 1}\mathrm{d}x$$

Megoldás

Legyen $t = \mathrm{e}^x$ helyettesítést! Ekkor $e^{2x} = t^2$, illetve $e^x = t$-ből $x = \ln(t)$, innen $\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{t}$, azaz

$$\int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^x + 1}\mathrm{d}x = \int \frac{t^2}{1+t}\frac{1}{t}\mathrm{d}t = \int \frac{t}{t+1}\mathrm{d}t = \int \frac{t+1-1}{t+1}\mathrm{d}t = \int 1 + \frac{-1}{t+1}\mathrm{d}t =$$

$$t - \ln|t+1| + C = \mathrm{e}^x - \ln|e^x + 1| + C,$$

ahol $C \in \mathbb{R}$ tetszőleges valós konstans.

8. Számítsa ki az alábbi integrált a $t = \mathrm{e}^x$ helyettesítés segítségével!

$$\int_{-1}^{0} \frac{e^{3x}}{e^{2x}+1}\mathrm{d}x =$$

Megoldás:

Legyen $t = \mathrm{e}^x$! Ekkor $x = \ln(t) = g(t)$, innen $\frac{1}{t} = g'(t)$. Másrészt a határok is megváltoznak. $x : -1 \rightsquigarrow 0$, akkor $t : e^{-1} \rightsquigarrow \mathrm{e}^0$. Azaz az integrál:

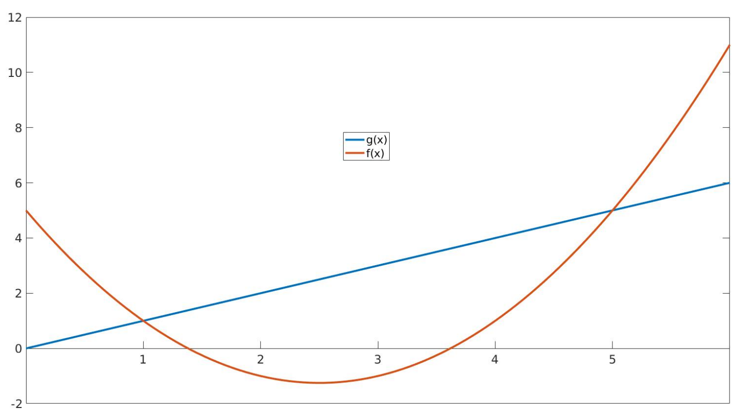
$$\int_{-1}^{0} \frac{e^{3x}}{e^{2x}+1}\mathrm{d}x = \int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} \frac{t^3}{t^2+1}\frac{1}{t}\mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} \frac{t^2}{t^2+1}\mathrm{d}t = \int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} \frac{t^2+1-1}{t^2+1}\mathrm{d}t =$$

$$\int_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} 1 + \frac{-1}{t^2+1}\mathrm{d}t = [t - \arctan(t)]_{\frac{1}{\mathrm{e}}}^{1} = 1 - \arctan(1) - \frac{1}{\mathrm{e}} + \arctan\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right) =$$

$$1 - \frac{\pi}{4} - \frac{1}{\mathrm{e}} + \arctan\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$$

9. Határozza meg az $f(x) = x^2 - 5x + 5$ és a $g(x) = x$ függvények görbéje által határolt korlátos síkidom területét!

Megoldás



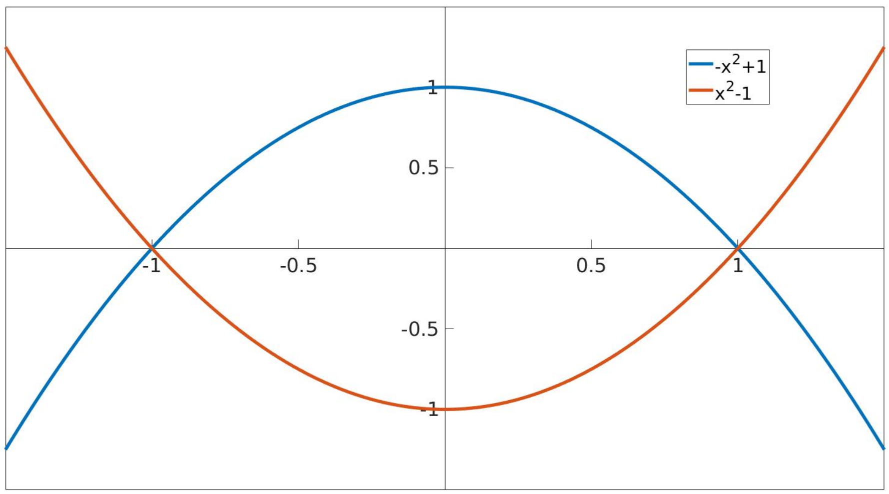
A felső határoló függvény az $g(x) = x$, az alsó az $f(x) = x^2 - 5x + 5$. A metszéspontok az $f(x) = g(x)$ megoldásából $x^2 - 5x + 5 = x$, azaz $x^2 - 6x + 5 = 0$, így $(x-5)(x-1) = 0$. A két metszéspont tehát az $x = 1$ és az $x = 5$. Így a keresett terület az alábbi integrál kiszámításával kapható meg:

$$\int_{1}^{5} x - (x^2 - 5x + 5)\mathrm{d}x = \int_{1}^{5} -x^2 + 6x - 5\mathrm{d}x = \left[\frac{-x^3}{3} + 3x^2 - 5x\right]_1^5 =$$

$$\frac{-125}{3} + 3 \cdot 25 - 25 + \frac{1}{3} - 3 + 5 = 52 - \frac{124}{3} = \frac{32}{3}$$

10. Határozza meg az $f(x) = x^2 - 1$ és a $g(x) = -x^2 + 1$ függvények görbéje által határolt korlátos síkidom területét!

Megoldás:



A felső határoló függvény az $g(x) = -x^2 + 1$, az alsó az $f(x) = x^2 - 1$. A metszéspontok az $f(x) = g(x)$ megoldásából $x^2 - 1 = -x^2 + 1$, azaz $2x^2 - 2 = 0$, így $(x-1)(x+1) = 0$. A két metszéspont tehát az $x_1 = -1$ és az $x_2 = 1$. Így a keresett terület az alábbi integrál kiszámításával kapható meg:

$$\int_{-1}^{1} -x^2+1-(x^2-1)\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} -2x^2+2\mathrm{d}x = \left[\frac{-2x^3}{3} + 2x\right]_{-1}^{1} = \frac{-2}{3}+2-\left(\frac{2}{3} - 2\right) = \frac{8}{3}$$

11. Számítsa ki az alábbi integrált!

$$\int \frac{x^3+1}{x^4+x^2}\mathrm{d}x$$

Megoldás

Parciális törtekre bontással:

$$\int \frac{x^3+1}{x^4+x^2}\mathrm{d}x = \int \frac{x^3+1}{x^2(x^2+1)}\mathrm{d}x = \int \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1}\mathrm{d}x$$

Közös nevezőre hozva:

$$\frac{x^3+1}{x^4+x^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{Cx+D}{x^2+1} = \frac{Ax(x^2+1) + B(x^2+1) + (Cx+D)x^2}{x^2(x^2+1)}$$

A két oldalon a nevezők megegyeznek, így kibontva a számlálót:

$$x^3(A+C) + x^2(B+D) + x(A) + B = x^3 + 1$$

adódik, ezt megoldva $A = 0$, $B = 1$, $C = 1$, $D = -1$, azaz

$$\int \frac{x^3+1}{x^4+x^2}\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x^2} + \frac{x-1}{x^2+1}\mathrm{d}x =$$

$$\int \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1} + \frac{-1}{x^2+1}\mathrm{d}x = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2}\ln|x^2+1| - \arctan(x) + C,$$

ahol $C \in \mathbb{R}$ tetszőleges konstans.

12. Konvergens-e az alábbi improprius integrál? Ha igen, mennyi az értéke?

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2+5x+6}\mathrm{d}x$$

Megoldás:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2+5x+6}\mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{1}{(x+2)(x+3)}\mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3}\mathrm{d}x =$$

$$\int_1^\infty \frac{1}{x+2} + \frac{-1}{x+3}\mathrm{d}x = \lim_{N\to\infty}\int_1^N \frac{1}{x+2} + \frac{-1}{x+3}\mathrm{d}x =$$

$$\lim_{N\to\infty}\left[\ln|x+2| - \ln|x+3|\right]_1^N = \lim_{N\to\infty}\left[\ln\frac{|x+2|}{|x+3|}\right]_1^N =$$

$$\lim_{N\to\infty}\ln\left|\frac{N+2}{N+3}\right| - \ln\frac{3}{4} = \ln 1 - \ln\frac{3}{4} = -\ln\frac{3}{4},$$

azaz az integrál konvergens, és az értéke $-\ln\dfrac{3}{4}$.

6.2. További gyakorlófeladatok

1. Számítsa ki az alábbi határozatlan integrálokat!

a,

$$\int \frac{x+3}{4x^2+3}\mathrm{d}x$$

b,

$$\int \frac{4x+1}{\sqrt{x^2+4x+7}}\mathrm{d}x$$

c,

$$\int \frac{2x+1}{\sqrt{5-x^2-4x}}\mathrm{d}x$$

d,

$$\int \frac{\mathrm{e}^{2x}}{(4+\mathrm{e}^{2x})^3}\mathrm{d}x$$

e,

$$\int (5x+7)\sinh(x+3)\mathrm{d}x$$

f,

$$\int x^7\ln(3x)\mathrm{d}x$$

2. Számítsa ki az alábbi integrálokat!

a,

$$\int_0^{\pi} \sin^2(2x)\mathrm{d}x$$

b,

$$\int_0^{\pi} \sin^4(x)\cos(x)\mathrm{d}x$$

c,

$$\int_1^2 |2x-3|\mathrm{d}x$$

3. Számítsa ki az $f(x) = x^2 - 4x$ és az $g(x) = -x^2 + 3$ görbéje közti területet!

4. Számítsa ki az alábbi integrálokat!

a,

$$\int \sqrt{4x^2-1}\mathrm{d}x = ?$$

Az $x = \dfrac{1}{2}\cosh(t)$ helyettesítéssel számolja ki!

b,

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{2x}}{\mathrm{e}^{3x}+1}\mathrm{d}x = ?$$

Az $\mathrm{e}^x = t$ helyettesítéssel számolja ki!