Elméleti Példák

1 Adja meg a folytonos valószínűségi változó definícióját. Írja fel a sűrűségfüggvény tulajdonságait.
Megoldás: Egy X valószínűségi változó egy függvény Ω és $\mathbb{R}$ között. Folytonos, ha eloszlásfüggvénye abszolút folytonos vagyis $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ ahol $f(x) = F'(x)$. *Vagy* Folytonos, ha létezik egy megszámlálható hely kivételével folytonos $f(x)$ hogy $\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ a valószínűségi változó eloszlásfüggvénye. *(9p)* A sűrűségfüggvény tulajdonságai:

- Nem negatív, $f(x) \geq 0$ *(2p)*
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$ *(2p)*
- $\int_{a}^{b} f(t)dt = P(a \leq X \leq b)$.*(2p)*

2 Legyen A és B két pozitív valószínűségű esemény. Döntse el az alábbi állítások közül melyik igaz, melyik hamis, vagy esetleg nem lehet eldönteni. A válaszát indokolja!

a) Ha A és B egymást kizáró, akkor függetlenek.
b) $P(A) = P(B) = 0{,}6$ akkor A és B nem lehet egymást kizáró.
c) $P(A) = P(B) = 0{,}6$ és A és B függetlenek.

Megoldás: Az A esemény és B esemény kizárja egymást, ha $P(AB) = 0$. Ezért:

a) $P(AB) = 0 \neq P(A)P(B)$ mert A és B két pozitív valószínűségű esemény. Tehát az állítás hamis. *(5p)*
b) $P(A) = P(B) = 0{,}6$ akkor A és B nem lehet egymást kizáró. Igaz mert $1 \geq P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$-ból következik hogy $P(AB) \geq 0{,}2$. *(5p)*
c) Függetlenek, ha $P(AB) = 0{,}36$ különben függők. Nem lehet eldönteni (csak ha ismernénk $P(AB)$ értékét). *(5p)*

3 Írja le a geometria eloszlás definícióját, alkalmazását, jelentését.
Megoldás: definició:

$$\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^{k-1}p \quad \forall k \in \{1,2,\dots\} \quad \textit{(2p)}$$

Jelentése: Addig végzek egymás után független p valószínűséggel sikeres kísérleteket amíg sikert nem kapok. A képletben X jelenti az első sikeres kísérlet sorszámát.*(4p)*
Alkalmazása: Orosz rulett, mennyit kell vizsgáznom ha mindig ugyanannyit készülök, hányadikra kapom az első 6-ost, stb.*(4p)*

4 Számolja ki, az $\mathbb{M}\left[(2+X)^2\right]$ és $\mathbb{D}^2(4+3X)$ értékét, ha tudjuk, hogy X várható értéke 1, a szórásnégyzete 5.
Megoldás: Mivel $\mathbb{D}^2(X+c) = \mathbb{D}^2(X)$ és $\mathbb{D}^2(cX) = c^2\mathbb{D}^2(X)$ ezért:

$$\mathbb{D}^2(4+3X) = \mathbb{D}^2(3X) = 9\mathbb{D}^2(X) = 45. \quad \textit{(4p)}$$

Ha $\mathbb{D}^2(X) = 5$ akkor

$$5 = \mathbb{D}^2(X) = \mathbb{M}(X^2) - (\mathbb{M}(X))^2 = \mathbb{M}(X^2) - 1 \Rightarrow \mathbb{M}(X^2) = 6 \quad \textit{(4p)}$$

és mivel $\mathbb{M}(X+c) = \mathbb{M}(X) + c$ és $\mathbb{M}(cX) = c\mathbb{M}(X)$ ezért:

$\mathbb{M}\left[(2+X)^2\right] = \mathbb{M}(4+4X+X^2) = 4+4\mathbb{M}(X)+\mathbb{M}(X^2) = 4+4+6 = 14$ *(2p)*

Gyakorlati Példák

1 Tegyük fel, hogy otthonunk és az egyetem közötti távolság megtételéhez szükséges idő olyan Normális eloszlású valószínűségi változó amelynek várható értéke 40 perc, szórása 7 perc.

a) Mennyi időt szánjunk a közlekedésre, ha 95%-os biztonsággal akarunk megérkezni az órára?

b) Hogyan kellene megváltoznia a szórásnak ahhoz, hogy az ehhez szükséges idő csak 45 perc legyen?

c) Mi a valószínűsége annak, hogy az eredeti feltételek mellett 35 perc alatt beérünk az egyetemre?

Megoldás: $X =$Az utazás hossza. $X \sim N(40;7)$, $Z \sim N(0;1)$

a) $a =?$

$$P(X < a) = 0{,}95 \Rightarrow P\left(\frac{X-40}{7} < \frac{a-40}{7}\right) = 0{,}95$$

$$P\left(Z < \frac{a-40}{7}\right) = \Phi(\frac{a-40}{7}) = 0{,}95$$

$$\frac{a-40}{7} = 1{,}65\textit{(táblázatból)} \Rightarrow a = 51{,}55 \quad \textit{(5p)}$$

b) Most $X \sim N(40;\sigma)$

$$P(X < 45) = 0.95 \quad \Rightarrow \quad P\left(\frac{X-40}{\sigma} < \frac{45-40}{\sigma}\right) = 0.95 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z < \frac{5}{\sigma}\right) = 0{,}95$$

$$\frac{5}{\sigma} = 1{,}65\text{(táblázatból)} \quad \Rightarrow \quad \sigma = 3{,}03 \quad \textit{(5p)}$$

c)

$$P(X < 35) =? \Rightarrow P\left(\frac{X-40}{7} < \frac{35-40}{7}\right) =$$

$$= \Phi\left(-\frac{5}{7}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{5}{7}\right) = 0{,}2388\text{(táblázatból)} \quad \textit{(5p)}$$

2 Tegyük, fel, hogy egy autóban az akkumulátor meghibásodásáig megtett út hossza exponenciális eloszlású valószínűségi változó, és az átlag 10 000 km.

a) Mi a valószínűsége annak, hogy a betervezett 5000 km-es utat az akkumulátor meghibásodása nélkül meg lehet tenni?

b) Hogyan határozná meg a keresett valószínűséget ha nem exponenciális eloszlású lenne a valószínűségi változó?

Megoldás:

a) Y =Az akkumulátor meghibásodásáig megtett út hossza. $Y \sim Exp(\lambda)$ ahol $\frac{1}{\lambda} = 10000$.

$$P(Y \geq 500) = 1 - P(Y < 5000) = 1 - \int_{-\infty}^{5000} \lambda e^{-\lambda x} dx =$$
$$= 1 - [1 - e^{-\lambda 5000}] = e^{-1/2} \quad \textit{(7p)}$$

b) Ha Y-nak más lenne az eloszlásfüggvénye, akkor bele kell kalkulálni az ediig megtett út hosszát a-t. Ekkor

$$P(Y \geq 5000{+}a | Y > a) = \frac{P(Y > 5000 + a \wedge Y > a)}{P(Y > a)} = \frac{1 - F(a + 5000)}{1 - F(a)}$$

ahol $F(x)$ az Y eloszlásfüggvénye.*(8p)*

3 Egy folyóban bekövetkező halpusztulásért 3 ipari üzem lehet a felelős. Tapasztalatok szerint a mérgező anyag kibocsátásának aránya az egyes üzemeknél: 20%, 50%, 30%. A mérések szerint az egyes üzemek szennyvízkibocsátása esetén a halpusztulás valószínűsége: 0,6, 0,15 és 0,25. MEnnyi a halpusztulás teljes valószínűsége?
Megoldás: A teljes valószínűség tételét használva:

$$0{,}2 \cdot 0{,}6 + 0{,}5 \cdot 0{,}15 + 0{,}3 \cdot 0{,}25 = 0{,}27 \quad \textit{(10p)}$$

4 Egy kiállítóhelyen 150 hely van. A tapasztalatok szerint a jelentkezők 15%-a valamilyen okból visszalép. Ezért 170 jelentkezést fogadnak el. Mi a valószínűsége, hogy végül nem jut mindenkinek hely? Milyen feltételezéssel kell élni?
*Megoldás:*Feltesszük, hogy a kiállítók egymástól függetlenül 0,15 valószínűséggel nem jönnel el. Ekkor X =Az eljövő kiállítók száma, $X \sim Bin(170; 0{,}85)$ a keresett valószínűség:

$$P(X > 150) = \sum_{k=151}^{1} 70 \binom{170}{k} p^k (1-p)^{170-k} \quad \textit{(5p)}$$

Kiszámításhoz lehet alkalmazni a DeMoivre–Laplace tételt:
$Bin(n;p) \to N(np; \sqrt{np(1-p)})$ Ekkor $X \sim N(144{,}5; 4{,}65)$, ha $n \to \infty$.
Így a valószínűség:

$$P(X > 150) = 1 - P\left(\frac{X - 144{,}5}{4{,}65} < \frac{150 - 144{,}5}{4{,}65}\right) = 1 - \Phi(1.18) = 0{,}119 \quad \textit{(5p)}$$