Elméleti Példák

1 Adja meg a valószínűségi változó eloszlásfüggvényének definícióját, és az eloszlásfüggvény tulajdonságait. Fejezze ki az X valószínűségi változó eloszlásfüggvényének segítségével a $P(X = x_0)$ valószínűséget.
Megoldás: Egy X valószínűségi változó eloszlásfüggvénye F az x_0 helyen megadja az $\{X < x_0\}$ esemény valószínűségét vagyis $F(x_0) = P(X < x_0)$.*(3p)* Tulajdonságai

- Monoton növő.*1p*
- (Alulról félig) Balról folytonos.*(2p)*
- $\lim_{x\to\infty} F(x) = 1$ és $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$.*(2p)*

A $P(X = x_0)$ kifejezhető mint $\lim_{x\to x_0+} F(x) - F(x_0)$.*(7p)*

2 Feltételes valószínűség fogalma. Független és teljesen független események. Lehet-e két esemény egyszerre egymást kizáró és független?
Megoldás: Az A esemény B eseményre vet feltételes valószínűségén a $\frac{P(AB)}{P(B)}$ hányadost értjük és $P(A|B)$-vel jelöljük.*(3p)* Az A és B események függetlenek, ha $P(AB) = P(A)P(B)$.*(3p)* n darab esemény akkor teljesen független, ha k-t $1 \le k \le n$ kiválasztva együttes bekövetkezésük valószínűsége az egyes események valószínűségének szorzata.*(4p)* Általában, ha két esemény kizárja egymást akkor nem függetlenek. (Hiszen az egyik bekövetkezése kizárja a másik bekövetkezését.)*(3p)* De definició szerint azok, ha $P(A) = 0$ vagy $P(B) = 0$.*(2p), Ha csak ezt hozza ki a hallgató (5p)*

3 Adja meg a diszkrét valószínűségi változó várható értékének definícióját, és a várható érték tulajdonságait. Adja meg a várható érték jelentését.
Megoldás: definició:

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{M}(x) = \sum_{x\in Im(X)} xP(X = x) \quad \textit{(3p)}$$

Tulajdonságai:

- Additív:
$$\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) \quad \textit{(1p)}$$
- Konstansra konstans:
$$\mathbb{E}(c) = c \quad \textit{(1p)}$$
- A konstant kiemelhető:
$$\mathbb{E}(cX) = c\mathbb{E}(X) \quad \textit{(1p)}$$

A valószínűségi változó várható értéke a valószínűségi változó lehetséges értékeinek a valószínűségük szerint súlyozott átlaga. *vagy* A várható érték az a szám amihez az átlag konvergál.*(4p), Megjegyezés: nem a legvalószínűbb érték—amit amúgy módusznak hívnak, hiszen a kockadobás várható értéke* 3,5 *de ilyen számot nem is dobhatunk.*

4 Írja le az exponenciális eloszlás definícióját, tulajdonságait. Adjon példát az alkalmazásra. Adja meg a mediánját.
Megoldás: Az exponenciális eloszlás sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & \text{ha}\, x \geq 0 \\ 0, & \text{különben} \end{cases} \quad \textit{(1p) rajta van a papíron}$$

Örökifjú tulajdonságú *(1p)* ami azt jelenti, hogy $P(X > a + b|X > a) = P(X > b)$.*(2p)* Egyszerű alkatrészek élettartama, pl. képcső, csavar ilyen eloszlású.*(3p)* Mediánja:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2} \\ 1 - e^{-\lambda x} &= \frac{1}{2} \\ e^{-\lambda x} &= \frac{1}{2} \\ x &= \frac{\ln(2)}{\lambda} \quad \textit{(3p)} \end{aligned}$$

Gyakorlati Példák

1 Egy bankfiókban a napi kifizetések összege N(3,6mFt; 0,9mFt) eloszlást követ.

a) Mennyi a valószínűsége annak hogy a napi kifizetések összege a (2,7mFt ; 4,6mFt) intervallumba esik?
b) Mekkorára kellene a kifizetések szórásának megváltoznia ahhoz, hogy az 5mFt feletti kifizetések valószínűsége 4% legyen?
c) Mennyi pénzt kell tartani a fiókban, ha 95%-os valószínűséggel akarjuk biztosítani a kifizetések teljesítését?

Megoldás: X = A napi kifizetések összege. $X \sim N(3{,}6; 0{,}9)$, $Z \sim N(0; 1)$

a)

$$\begin{aligned} P(2{,}7 < X < 4{,}5) =& P\left(\frac{2{,}7 - 3{,}6}{0{,}9} < \frac{X - 3{,}6}{0{,}9} < \frac{4{,}5 - 3{,}6}{0{,}9}\right) = \\ = P(-1 < Z < 1) =& \Phi(1) - \Phi(-1) = 2\Phi(1) - 1 = 0.6826 \quad \textit{(5p)} \end{aligned}$$

b) Most $X \sim N(3{,}6; \sigma)$

$$\begin{aligned} & P(X > 5) = 0.04 \quad \Rightarrow \quad P(X < 5) = 0.96 \Rightarrow \\ & \Rightarrow P\left(\frac{X - 3{,}6}{\sigma} < \frac{5 - 3{,}6}{\sigma}\right) = P\left(Z < \frac{1{,}4}{\sigma}\right) = 0.96 \\ & \frac{1{,}4}{\sigma} = 1{,}75(\text{táblázatból}) \quad \Rightarrow \quad \sigma = 0{,}8 \quad \textit{(5p)} \end{aligned}$$

c) $a = ?$

$$\begin{aligned} & P(X < a) = 0.95 \Rightarrow \left(\frac{X - 3{,}6}{0{,}9} < \frac{a - 3{,}6}{0{,}9}\right) = 0.95 \\ & \frac{a - 3{,}5}{0{,}9} = 1{,}65(\text{táblázatból}) \quad \Rightarrow \quad a = 5{,}085 \quad \textit{(5p)} \end{aligned}$$

2 Egy valószínűségi változó sűrűségfüggvénye a következő :

$$f(x) = \begin{cases} a + bx^2, & \text{ha } 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

Határozza meg az a és b paraméterek értékét, ha tudjuk hogy a változó várható értéke $3/5$

Megoldás: Tudjuk, hogy

$$3/5 = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^1 ax + bx^3 dx = \frac{a}{2} + \frac{b}{4} \quad \textit{(6p)}$$

valamint azt is tudjuk, hogy a sűrűségfüggvény integrálja 1.

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^1 a + bx^2 dx = a + \frac{b}{3} \quad \textit{(6p)}$$

a két egyenletből $a = 0{,}6$, $b = 1{,}2$ *(4p)*.

3 Egy útkereszteződésben a heti koccanások száma 2,2.

a) Mi annak a valószínűsége, hogy a következő héten egy koccanás sem történik?

b) Mi annak a valószínűsége, hogy legalább kettő lesz, ha tudjuk, hogy történt koccanás?

Megoldás: Az autók sokan vannak a koccanás valószínűsége kicsi, de várható érték kb állandó tehát Poisson eloszlást használunk $\lambda = 2{,}2$ paraméterrel. *(3p)* X =hány autó koccant. $X \sim Poi(2{,}2)$

a)

$$P(X = 0) = \frac{2{,}2^0}{0!} e^{-2{,}2} = \frac{1}{e^{2{,}2}} \quad \textit{(2p)}$$

b)

$$P(X > 1 | x > 0) = \frac{P(X > 1 \wedge X > 0)}{P(x > 0)} = \frac{1 - 2{,}2e^{-2{,}2} - e^{-2{,}2}}{1 - e^{-2{,}2}} \quad \textit{(5p)}$$

4 Egy oktató 10 előre kiadott kérdés közül, találomra választ ki 5 kérdést a vizsgán. Ha egy diák 7 kérdést tanult meg, akkor mi a valószínűsége, hogy

a) mind az 5 kérdésre fog tudni válaszolni?

b) legalább 4 kérdésre fog tudni válaszolni?

Megoldás: $\binom{10}{5}$ féleképp választhatja ki a tanár a 10 kérdésből az 5-öt amit megkérdez. $\binom{7}{k}\binom{3}{5-k}$ azon választások száma amikor pont k darabot választ abból a 7-ből amit a diák tud. Tehát:

a)

$$\frac{\binom{7}{5}}{\binom{10}{5}} = 0.0833 \quad \textit{(5p)}$$

b)

$$\frac{\binom{7}{4}\binom{3}{1}+\binom{7}{5}}{\binom{10}{5}} = 0.5 \quad \textit{(5p)}$$

Vagy $\binom{10}{7}$ féleképp válaszhatja ki a diák mit tanul meg, és $\binom{5}{k}\binom{5}{7-k}$ azon választások száma amikor pont k darabot választ abból az 5-ből amit a tanár kérdez és $7-k$-t abból amit a tanár nem kérdez. Tehát:

a)

$$\frac{\binom{5}{5}\binom{5}{2}}{\binom{10}{7}} = 0.0833 \quad \textit{(5p)}$$

b)

$$\frac{\binom{5}{4}\binom{5}{3}+\binom{5}{2}}{\binom{10}{7}} = 0.5 \quad \textit{(5p)}$$