E1. Mit nevezünk két valószínűségi változó együttes eloszlásfüggvényének? Milyen tulajdonságai vannak az együttes eloszlásfüggvénynek? Hogyan jellemezhetjük a segítségével a valószínűségi változók függetlenségét? *(15 p)*

Megoldás: Ha X és Y két valószínűségi változó akkor az $F(a,b) = P(X < a, Y < b)$ függvényt az együttes eloszlásfüggvénynek nevezzük.*(3p)* $F(x,y)$ mindkét változójában: balról (v. alulról félig) folytonos *(2p)*, monoton növő *(1p)*. $\lim_{x\to-\infty} F(x,y) = \lim_{y\to-\infty} F(x,y) = 0$ *(2p)*. $\lim_{(x,y)\to(qinfty,\infty)} F(x,y) = 1$ *(1p)*. $\lim_{x\to\infty} F(x,y) = F_2(y)$, $\lim_{y\to\infty} F(x,y) = F_1(x)$ *(2p)*. Ha X és Y függetlenek akkor és csakis akkor ha $F(x,y) = F_1(x)F_2(y)$ *(4p)*.

E2. Definiálja két valószínűségi változó korrelációs együtthatóját! Milyen értékeket vehet fel a korrelációs együttható? Mi a kapcsolat a korrelációs együttható és a valószínűségi változók függetlensége között? *(15 p)*

Megoldás: $Corr(X,Y) = r(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\mathbb{D}(X)\mathbb{D}(Y)}$ *(3p)*, ahol $Cov(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ *(3p)*. $-1 \leq r(X,Y) \leq 1$ *(3p)*. Ha a valószínűségi változók függetlenek akkor $Cov(X,Y) = 0$ így $r(X,Y) = 0$ *(3p)*. Ha $r(X,Y) = 0$ attól még X és Y nem biztos hogy függetlenek *(3p)*.

E3. Mit mondhatunk független, azonos eloszlású valószínűségi változók összegének a várható értékéről és szórásáról? *(10 p)*

Megoldás: Ha $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független azonos eloszlású valószínűségi változók m várható értékkel és σ szórással, akkor $\mathbb{E}(\overline{X}) = \frac{\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(X_k)}{n} = m$ *(4p)*. Míg $\mathbb{D}^2(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{D}^2(X_k) = n\sigma^2$ (A független valószínűségi változók szórásneégyzetei összeadódnak). Így $\mathbb{D}^2(\overline{X}) = \frac{1}{n^2}\mathbb{D}^2(\sum_{k=1}^{n} X_k) = \frac{\sigma^2}{n}$. Ebből $\mathbb{D}(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ *(6p)*.

E4. Hogyan számolja ki két valószínűségi változó együttes sűrűségfüggvénye segítségével a valószínűségi változók sűrűségfüggvényeit? *(10 p)*

Megoldás: Ha az együttes sűrűségfüggvény $f(x,y)$ akkor

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy \textit{(5p)}$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx \textit{(5p)}$$

GY1. András és Benedek az ország két különböző végébe készülnek. Egyszerre állnak ki stoppolni, András az M1-es bevezető szakaszán, Benedek az M3-mason. A várakozási idő exponenciális eloszlású, és különböző utakon a várakozási idők egymástól függetlenek. Az M1-es úton az átlagos várakozási idő fél óra, az M3-mason 1 óra.

a, Írja fel a várakozási idők sűrűségfüggvényeit! *(5 p)*

b, Írja fel a két várakozási idő együttes sűrűségfüggvényét! *(5 p)*

c, Mennyi a valószínűsége, hogy mindkettőjüknek 1 óránál kevesebbet kell várakozniuk? *(5 p)*

Megoldás:

a, Mivel $\mathbb{E}(X_1) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{E}(X_2) = 1$ ezért a sűrűségfüggvények:

$$f_1(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & \text{ha } 0 \leq x \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} e^{-y}, & \text{ha } 0 \leq x \\ 0, & \text{különben} \end{cases} \textit{(5 p)}$$

b, Mivel függetlenek $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$.

$$f(x,y) = \begin{cases} 2e^{-2x-y}, & \text{ha } 0 \leq x, 0 \leq y \\ 0, & \text{különben} \end{cases} \textit{(5 p)}$$

c, $P(X < 1, Y < 1) = F(1,1) = F_1(1)F_2(1) = (1 - e^{-2})(1 - e^{-1})$ (vagy $= \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)dxdy$) *(5 p)*

GY2. Egy megrögzött szerencsejátékos minden nap játszik egy nyerőgéppel, amivel 0,1 valószínűséggel 100 Ft-ot nyer, 0,7 valószínűséggel 30 Ft-ot veszít, 0,2 valószínűséggel ugyanannyi pénze marad, mint volt.

a, Mennyi a várható nyereménye egy játék alkalmával (ha veszít, az negatív nyereménynek számít)? Mennyi a nyeremény szórása? *(5 p)*

b, 400 nap után mennyi az átlagos nyeremény várható értéke? Mennyi a szórása? *(5 p)*

c, Mennyi a valószínűsége, hogy 400 nap elteltével az átlagos nyereménye kisebb, mint -9 (azaz átlagosan több, mint 9 Ft-ot veszített)? *(5 p)*

Megoldás:

a, Legyen X_i az i-edik napi nyeremény. $\mathbb{E}(X_i) = 100 \cdot 0{,}1 + (-30) \cdot 0{,}7 + 0 \cdot 0{,}2 = -11$Ft *(2 p)*. $\mathbb{E}(X_i^2) = 100^2 \cdot 0{,}1 + (-30)^2 \cdot 0{,}7 + 0^2 \cdot 0{,}2 = 1630$, $\mathbb{D}(X_i) = \sqrt{\mathbb{E}(X_i^2) - \mathbb{E}(X_i)^2} = 38{,}84$ *(3p)*.

b, $\mathbb{E}(\overline{X}) = -11$ *(2p)*, $\mathbb{D}(\overline{X}) = \frac{38{,}84}{\sqrt{400}} = 1{,}94$ *(3p)*.

c, Mivel n nagy, a Centrális Határeloszlás Tétel szerint $\overline{X}$ eloszlása normális eloszlású b feladatban megadott várható értékkel és szórással. $P(\overline{X} < -9) = P(\frac{\overline{X}+11}{1{,}94} < \frac{2}{1{,}94}) = \Phi(1{,}02) = 0{,}846136$ (vagy $P(\overline{X} < -9) = P(X_1 + X_2 + \ldots + X_{400} < -9 \cdot 400) = \ldots = 0{,}846\ldots$) *(5 p)*.

GY3. Két valószínűségi változó együttes eloszlását az alábbi táblázat tartalmazza:

$\xi \setminus \eta$	-1	0	2
-1	0,1	0,2	p
1	0,2	0,3	q

Tudjuk, hogy $M(\xi) = 0{,}2$. Mennyi p és q értéke? Számolja ki a két valószínűségi változó korrelációs együtthatóját, értelmezze az eredményt! *(10 p)*

Megoldás: A $p + q = 0{,}2$ és a $-1(0{,}3 + p) + 1(0{,}5 + q) = 0{,}2$ egyenletekből $p = q = 0{,}1$ *(4p)*

$$\mathbb{E}(\xi\eta) = (-2)0{,}1 + (-1)0{,}2 + (1)0{,}1 + (2)0{,}1 = -0{,}1 \textit{(1p)}$$

$$\mathbb{E}(\eta) = (-1)0{,}3 + (0)0{,}5 + (2)0{,}2 = 0{,}1 \textit{(1p)}$$

$$\mathbb{E}(\xi^2) = (1)^2 0{,}4 + (-1)^2 0{,}6 = 1, \quad \mathbb{D}(\xi) = \sqrt{1 - 0{,}04} \approx 0{,}98 \textit{(1p)}$$

$$\mathbb{E}(\eta^2) = (-1)^2 0{,}3 + (0)^2 0{,}5 + (2)^2 0{,}2 = 1{,}1, \quad \mathbb{D}(\eta) = \sqrt{1{,}1 - 0{,}01} \approx 1{,}04 \textit{(1p)}$$

$$Corr(\xi,\eta) = \frac{-0{,}1 - 0{,}02}{0{,}98 \cdot 1{,}04} \textit{(1p)}$$

Mivel a korreláció nem 0 nem függetlenek *(1p)*.

GY4. Az előző feladatban megadott valószínűségi változókra számolja ki az $M(\xi|\eta = y_i)$ feltételes várhatóértékeket!

Megoldás:

$$\mathbb{E}(\xi|\eta = -1) = -1P(\xi = -1|\eta = -1) + 1P(\xi = 1|\eta = -1) = -1\frac{0{,}1}{0{,}3} + 1\frac{0{,}2}{0{,}3} = \frac{1}{3} \textit{(4p)}$$

Hasonlóan

$$\mathbb{E}(\xi|\eta = 0) = -1\frac{0{,}2}{0{,}5} + 1\frac{0{,}3}{0{,}5} = \frac{1}{5} \textit{(3p)}$$

$$\mathbb{E}(\xi|\eta = 2) = -1\frac{0{,}1}{0{,}2} + 1\frac{0{,}1}{0{,}2} = 0 \textit{(3p)}$$