E1. Milyen tulajdonságai vannak két folytonos valószínűségi változó együttes sűrűségfüggvényének? Hogyan számolható ki az együttes eloszlásfüggvényből az együttes sűrűségfüggvény, és fordítva? Hogyan jellemezhetjük az együttes sűrűségfüggvény segítségével a valószínűségi változók függetlenségét? *(15 p)*

Megoldás: Az együttes sűrűségfüggvény tulajdonságai: $f(x,y) \geq 0$, $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy = 1$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx = f_2(y)$, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy = f_1(x)$, $P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) = \int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy$ *(5p)*. $\int_{-\infty}^{b}\int_{-\infty}^{a} f(x,y)dxdy = F(a,b)$ *(3p)*, $F''_{xy}(x,y) = f(x,y)$ *(3p)*. Ha X és Y függetlenek, akkor $f(x,y) = f_1(x)f_2(y)$*(4p)*.

E2. Legyen $\eta = -3\xi + 2$ és $M(\xi) = 4$, $M(\xi^2) = 25$. Számolja ki ξ és η kovarianciáját és korrelációs együtthatóját! *(15 p)*

Megoldás: $\mathbb{E}(\eta) = -3\mathbb{E}(\xi) + 2 = -10$*(3p)*, $\mathbb{D}(\xi) = \sqrt{\mathbb{E}(\xi^2) - \mathbb{E}^2(\xi)} = 3$. $\mathbb{D}(\eta) = 3\mathbb{D}(\xi) = 9$ *(4p)*. $\mathbb{E}(\eta\xi) = (-3\xi^2 + 2\xi) = -3 \cdot 25 + 2 \cdot 4 = -67$ *(4p)*. $Cov(\eta,\xi) = \mathbb{E}(\eta\xi) - \mathbb{E}(\eta)\mathbb{E}(\xi)$*(1p)*, $Cov(\eta,\xi) = -67 - 4 \cdot (-10) = -27$*(1p)*. $Corr(\eta,\xi) = \frac{Cov(\eta,\xi)}{\mathbb{D}(\eta)\mathbb{D}(\xi)}$*(1p)*. $Corr(\eta,\xi) = -1$ *(1p)*.

E3. Mit mondhatunk független, azonos eloszlású valószínűségi változók számtani közepének a várható értékéről és szórásáról? *(10 p)*

Megoldás: Ha $X_1,X_2,\ldots,X_n$ független azonos eloszlású valószínűségi változók m várható értékkel és σ szórással, akkor $\mathbb{E}(\overline{X}) = \frac{\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(X_k)}{n} = m$ *(4p)*. Míg $\mathbb{D}^2(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \sum_{k=1}^{n}\mathbb{D}^2(X_k) = n\sigma^2$ (A független valószínűségi változók szórásneégyzetei összeadódnak). Így $\mathbb{D}^2(\overline{X}) = \frac{1}{n^2}\mathbb{D}^2(\sum_{k=1}^{n} X_k) = \frac{\sigma^2}{n}$. Ebből $\mathbb{D}(\overline{X}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ *(6p)*.

E4. Mondja ki a centrális határeloszlástételt! *(10 p)*

Megoldás: Legyenek $X_1, X_2, \ldots, X_n$ független*(2p)* azonos eloszlású*(1p)* valószínűségi változók melyeknek harmadik momentuma véges $\mathbb{E}(X_i^3) < \infty$ (vagy 2+ε momentuma véges)*(2p)*. Várható értékük m, szórásuk σ. Ekkor

$$P\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - n \cdot m}{\sqrt{n}\sigma} < x\right) \to \Phi(x)$$

Vagyis $\frac{X_1+X_2+\cdots+X_n-n\cdot m}{\sqrt{n}\sigma}$ eloszlása tart a standard normális eloszláshoz.*(5p)*

GY1. András és Benedek egyszerre állnak ki a buszmegállóba egy véletlenszerű időpontban. Benedek busza 15 percenként jár, András busza 20 percenként, egymástól függetlenül.

a, Írja fel a várakozási idők eloszlásfüggvényeit! *(5 p)*

b, Írja fel a két várakozási idő együttes eloszlásfüggvényét! *(5 p)*

c, Mennyi a valószínűsége, hogy mindkettőjüknek 10 percnél kevesebbet kell várakozniuk? *(5 p)*

Megoldás:

a, Mivel $\mathbb{E}(X_1) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{E}(X_2) = \frac{1}{3}$ ezért a sűrűségfüggvények:

$$F_1(x) = \begin{cases} 1 - e^{-4x}, & \text{ha } 0 \leq x \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

$$f_2(y) = \begin{cases} 1 - e^{-3y}, & \text{ha } 0 \leq x \\ 0, & \text{különben} \end{cases} \quad (5\ p)$$

b, Mivel függetlenek $F(x,y) = F_1(x)F_2(y)$.

$$F(x,y) = \begin{cases} (1 - e^{-4x})(1 - e^{-3y}), & \text{ha } 0 \leq x \text{ és } 0 \leq y \\ 0, & \text{különben} \end{cases} \quad (5\ p)$$

c, $P(X<1/6, Y<1/6) = F(1/6,1/6) = F_1(1/6)F_2(1/6) = (1-e^{-\frac{2}{3}})(1-e^{-\frac{1}{2}})$ (vagy $= \int_0^{\frac{1}{6}}\int_0^{\frac{1}{6}} f(x,y)dxdy$) *(5 p)*

GY2. Egy megrögzött szerencsejátékos minden nap játszik egy nyerőgéppel, amivel 0,1 valószínűséggel 100 Ft-ot nyer, 0,7 valószínűséggel 30 Ft-ot veszít, 0,2 valószínűséggel ugyanannyi pénze marad, mint volt.

a, Mennyi a várható nyereménye egy játék alkalmával (ha veszít, az negatív nyereménynek számít)? Mennyi a nyeremény szórása? *(5 p)*

b, 900 nap után mennyi az átlagos nyeremény várható értéke? Mennyi a szórása? *(5 p)*

c, Mennyi a valószínűsége, hogy 900 nap elteltével az átlagos nyereménye nagyobb, mint -12 (azaz átlagosan kevesebb, mint 12 Ft-ot veszített)? *(5 p)*

emphMegoldás:

a, Legyen X_i az i-edik napi nyeremény. $\mathbb{E}(X_i) = 100\cdot 0{,}1 + (-30)\cdot 0{,}7 + 0\cdot 0{,}2 = -11$Ft *(2 p)*. $\mathbb{E}(X_i^2) = 100^2\cdot 0{,}1 + (-30)^2\cdot 0{,}7 + 0^2\cdot 0{,}2 = 1630$, $\mathbb{D}(X_i) = \sqrt{\mathbb{E}(X_i^2) - \mathbb{E}(X_i)^2} = 38{,}84$ *(3p)*.

b, $\mathbb{E}(\overline{X}) = -11$ *(2p)*, $\mathbb{D}(\overline{X}) = \frac{38{,}84}{\sqrt{900}} = 1{,}29$ *(3p)*.

c, Mivel n nagy, a Centrális Határeloszlás Tétel szerint $\overline{X}$ eloszlása normális eloszlású b feladatban megadott várható értékkel és szórással. $P(\overline{X} > -12) = P(\frac{\overline{X}+11}{1{,}29} > \frac{-1}{1{,}29}) = \Phi(0{,}77) = 0{,}7794$, (vagy $P(\overline{X} > -12) = P(X_1 + X_2 + \dots + X_{900} > -12\cdot 900) = \dots = 0{,}7794$) *(5 p)*.

GY3. Két valószínűségi változó együttes eloszlását az alábbi táblázat tartalmazza:

$\xi \setminus \eta$	-1	0	2
-1	0,1	0,2	p
1	0,2	0,3	q

Tudjuk, hogy $M(\xi) = 0{,}1$. Mennyi p és q értéke? Számolja ki a két valószínűségi változó korrelációs együtthatóját, értelmezze az eredményt! *(10 p)*

Megoldás: A $p+q = 0{,}2$ és a $-1(0{,}3+p) + 1(0{,}5+q) = 0{,}1$ egyenletekből $p = 0{,}15, q = 0{,}05$ *(4p)*

$$\mathbb{E}(\xi\eta) = (-2)0{,}15 + (-1)0{,}1 + (1)0{,}2 + (2)0{,}05 = -0{,}1 \textit{(1p)}$$

$$\mathbb{E}(\eta) = (-1)0{,}3 + (0)0{,}5 + (2)0{,}2 = 0{,}1 \textit{(1p)}$$

$$\mathbb{E}(\xi^2) = (1)^2 0{,}45 + (-1)^2 0{,}55 = 1, \quad \mathbb{D}(\xi) = \sqrt{1-0{,}01} \approx 0{,}99 \textit{(1p)}$$

$$\mathbb{E}(\eta^2) = (-1)^2 0{,}3 + (0)^2 0{,}5 + (2)^2 0{,}2 = 1{,}1, \quad \mathbb{D}(\eta) = \sqrt{1{,}1-0{,}01} \approx 1{,}04 \textit{(1p)}$$

$$Corr(\xi,\eta) = \frac{-0{,}1 - 0{,}01}{0{,}99\cdot 1{,}04} \textit{(1p)}$$

Negatívan korreláltak, nem függetlenek *(1p)*.

GY4. Az előző feladatban megadott valószínűségi változókra számolja ki az $M(\eta|\xi = x_i)$ feltételes várhatóértékeket! *(10 p)*

Megoldás:

$$\mathbb{E}(\eta|\xi=-1) = -1P(\eta=-1|\xi=-1) + 0P(\eta=0|\xi=-1) + 2P(\eta=2|\xi=-1) =$$
$$= -1\frac{0{,}1}{0{,}45} + 0\frac{0{,}2}{0{,}45} + 2\frac{0{,}15}{0{,}45} = \frac{4}{9} \textit{(5p)}$$

Hasonlóan

$$\mathbb{E}(\eta|\xi=1) = -1\frac{0{,}2}{0{,}55} + 0\frac{0{,}3}{0{,}55} + 2\frac{0{,}05}{0{,}55} = \frac{-2}{11} \textit{(3p)}$$