Nevezetes Eloszlások I. — Diszkrét eloszlások, gyakorlat

dr. Farkas Lóránt Ernő

2020 tavasz

Példa Binomiális Eloszlásra

Egy tesztkérdésnél, amire kétféleképp lehet válaszolni, 3 lehetséges eset van: tudjuk a helyes választ $\frac{4}{7}$ valószínűséggel, rosszul tudjuk a választ $\frac{1}{7}$ valószínűséggel és nem tudjuk a választ $\frac{2}{7}$ valószínűséggel. Mi a valószínűsége hogy:

Példa Binomiális Eloszlásra

Egy tesztkérdésnél, amire kétféleképp lehet válaszolni, 3 lehetséges eset van: tudjuk a helyes választ $\frac{4}{7}$ valószínűséggel, rosszul tudjuk a választ $\frac{1}{7}$ valószínűséggel és nem tudjuk a választ $\frac{2}{7}$ valószínűséggel. Mi a valószínűsége hogy:

a) Jól válaszolunk egy kérdésre?

Példa Binomiális Eloszlásra

Egy tesztkérdésnél, amire kétféleképp lehet válaszolni, 3 lehetséges eset van: tudjuk a helyes választ $\frac{4}{7}$ valószínűséggel, rosszul tudjuk a választ $\frac{1}{7}$ valószínűséggel és nem tudjuk a választ $\frac{2}{7}$ valószínűséggel. Mi a valószínűsége hogy:

a) Jól válaszolunk egy kérdésre?
b) Egy 20 kérdéből álló teszten legalább 14 pontot elérünk?

Példa Binomiális Eloszlásra

Egy tesztkérdésnél, amire kétféleképp lehet válaszolni, 3 lehetséges eset van: tudjuk a helyes választ $\frac{4}{7}$ valószínűséggel, rosszul tudjuk a választ $\frac{1}{7}$ valószínűséggel és nem tudjuk a választ $\frac{2}{7}$ valószínűséggel. Mi a valószínűsége hogy:

a) Jól válaszolunk egy kérdésre?
b) Egy 20 kérdéből álló teszten legalább 14 pontot elérünk?
c) Feltéve, hogy egy kérdésre jól válaszoltunk, azért válaszolunk jól mert tudtuk a választ?

Binomiális Példa Megoldása

a) Nevezzük el az eseményeket: $J =$ Jól válaszolunk a kérdésre, $T =$ Tudjuk a választ, $R =$ Rosszul tudjuk, $N =$ Nem tudjuk (2 pont).

Binomiális Példa Megoldása

a) Nevezzük el az eseményeket: $J =$ Jól válaszolunk a kérdésre, $T =$ Tudjuk a választ, $R =$ Rosszul tudjuk, $N =$ Nem tudjuk (2 pont).

T, R, N teljes eseményrendszert (particiót/osztályozást) alkot(1p). Amit a feldatból tudunk: $\mathrm{P}(J|T) = 1$, $\mathrm{P}(J|N) = 1/2$, $\mathrm{P}(J|R) = 0$, $\mathrm{P}(T) = 4/7$, $\mathrm{P}(N) = 2/7$, $\mathrm{P}(R) = 1/7$ (3p).

Binomiális Példa Megoldása

a) Nevezzük el az eseményeket: J = Jól válaszolunk a kérdésre, T = Tudjuk a választ, R = Rosszul tudjuk, N = Nem tudjuk (2 pont).

T, R, N teljes eseményrendszert (particiót/osztályozást) alkot(1p). Amit a feldatból tudunk: $\mathrm{P}(J|T) = 1$, $\mathrm{P}(J|N) = 1/2$, $\mathrm{P}(J|R) = 0$, $\mathrm{P}(T) = 4/7$, $\mathrm{P}(N) = 2/7$, $\mathrm{P}(R) = 1/7$ (3p).

Tehát a teljes valószínűség tételből (2p)

$$\mathrm{P}(J) = \mathrm{P}(J|T)\mathrm{P}(T) + \mathrm{P}(J|N)\mathrm{P}(N) + \mathrm{P}(J|R)\mathrm{P}(R) =$$
$$= 4/7 + 1/2 \cdot 2/7 + 0 \cdot 1/7 = 5/7 \quad (2p)$$

Binomiális Példa Megoldása II

b) X=Jó válaszok száma. $X \sim Bin(20{,}5/7)$.

Binomiális Példa Megoldása II

b) X=Jó válaszok száma. $X \sim Bin(20{,}5/7)$.

Azt kérdezik hogy P($X \geq 14$) =?

Binomiális Példa Megoldása II

b) X=Jó válaszok száma. $X \sim Bin(20{,}5/7)$.

Azt kérdezik hogy $P(X \geq 14) =?$

Ez pedig:

$$P(X \geq 14) = \sum_{k=14}^{20} P(X = k) = \sum_{k=14}^{20} \binom{20}{k} \left(\frac{5}{7}\right)^k \left(\frac{2}{7}\right)^{20-k}$$

$$= \binom{20}{14} \left(\frac{5}{7}\right)^{14} \left(\frac{2}{7}\right)^{6} + \binom{20}{15} \left(\frac{5}{7}\right)^{15} \left(\frac{2}{7}\right)^{5} + \dots$$

$$+ \binom{20}{20} \left(\frac{5}{7}\right)^{20} \approx 0{,}66$$

Binomiális Példa Megoldása II

b) X=Jó válaszok száma. $X \sim Bin(20{,}5/7)$.

Azt kérdezik hogy $\mathrm{P}(X \geq 14) =?$

Ez pedig:

$$\mathrm{P}(X \geq 14) = \sum_{k=14}^{20} \mathrm{P}(X = k) = \sum_{k=14}^{20} \binom{20}{k} \left(\frac{5}{7}\right)^{k} \left(\frac{2}{7}\right)^{20-k}$$

$$= \binom{20}{14} \left(\frac{5}{7}\right)^{14} \left(\frac{2}{7}\right)^{6} + \binom{20}{15} \left(\frac{5}{7}\right)^{15} \left(\frac{2}{7}\right)^{5} + \dots$$

$$+ \binom{20}{20} \left(\frac{5}{7}\right)^{20} \approx 0{,}66$$

c) A fenti jelölésekkel, $\mathrm{P}(T|J) =?$ Bayes tétele szerint
$\mathrm{P}(T|J) = \mathrm{P}(J|T)\frac{\mathrm{P}(T)}{\mathrm{P}(J)} = 1\frac{4/7}{5/7} = 4/5.$

Példa Geometriai Eloszlásra

Egy játékos a pénzfeldobásnál a következő stratégiát követi: Mindig „fej”-re tesz, először 1 petákot és ha írást dob megkétszerezi előző tétjét.

Példa Geometriai Eloszlásra

Egy játékos a pénzfeldobásnál a következő stratégiát követi: Mindig „fej”-re tesz, először 1 petákot és ha írást dob megkétszerezi előző tétjét.

a) Mennyi lesz a nyereményének a várható értéke?

Példa Geometriai Eloszlásra

Egy játékos a pénzfeldobásnál a következő stratégiát követi: Mindig „fej”-re tesz, először 1 petákot és ha írást dob megkétszerezi előző tétjét.

a) Mennyi lesz a nyereményének a várható értéke?

b) Mennyi lesz a nyereményének várható értéke ha csak $2^k - 1$ peták van nála (és továbbra is a fenti stratégiát követi)?

Geometriai Eloszlás Példa Megoldása

Legyen $F =$hányadik dobásra jön fej. Legyen Ny a nyeremény.

Geometriai Eloszlás Példa Megoldása

Legyen $F =$hányadik dobásra jön fej. Legyen Ny a nyeremény.

Ha az 1. dobásra dob fejet 1 peták a nyereménye

Geometriai Eloszlás Példa Megoldása

Legyen F =hányadik dobásra jön fej. Legyen Ny a nyeremény.

Ha az 1. dobásra dob fejet 1 peták a nyereménye

Ha a 2. dobásra dob fejet 2-1=1 peták a nyereménye

Geometriai Eloszlás Példa Megoldása

Legyen F =hányadik dobásra jön fej. Legyen Ny a nyeremény.

Ha az 1. dobásra dob fejet 1 peták a nyereménye

Ha a 2. dobásra dob fejet 2-1=1 peták a nyereménye

Ha a 3. dobásra dob fejet 4-(2+1)=1 peták a nyereménye

Geometriai Eloszlás Példa Megoldása

Legyen F =hányadik dobásra jön fej. Legyen Ny a nyeremény.

Ha az 1. dobásra dob fejet 1 peták a nyereménye

Ha a 2. dobásra dob fejet 2-1=1 peták a nyereménye

Ha a 3. dobásra dob fejet 4-(2+1)=1 peták a nyereménye

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

Geometriai Eloszlás Példa Megoldása

Legyen F =hányadik dobásra jön fej. Legyen Ny a nyeremény.

Ha az 1. dobásra dob fejet 1 peták a nyereménye

Ha a 2. dobásra dob fejet 2-1=1 peták a nyereménye

Ha a 3. dobásra dob fejet 4-(2+1)=1 peták a nyereménye

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

Ha a k. dobásra dob fejet $2^{k-1} - \left(\sum_{l=0}^{k-2} 2^l \right) = 1$ peták a nyereménye

Geometriai Eloszlás Példa Megoldása

Legyen F =hányadik dobásra jön fej. Legyen Ny a nyeremény.

Ha az 1. dobásra dob fejet 1 peták a nyereménye

Ha a 2. dobásra dob fejet 2-1=1 peták a nyereménye

Ha a 3. dobásra dob fejet 4-(2+1)=1 peták a nyereménye

$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$

Ha a k. dobásra dob fejet $2^{k-1} - \left(\sum_{l=0}^{k-2} 2^l\right) = 1$ peták a nyereménye

Így az a) kérdésre a válasz:

$$\mathbb{E}(Ny) = \sum_{k=1}^{\infty} 1 \cdot \mathrm{P}(F = k) = \sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$$

Geometriai Eloszlás Példa Megoldása

Legyen F =hányadik dobásra jön fej. Legyen Ny a nyeremény.

Ha az 1. dobásra dob fejet 1 peták a nyereménye

Ha a 2. dobásra dob fejet 2-1=1 peták a nyereménye

Ha a 3. dobásra dob fejet 4-(2+1)=1 peták a nyereménye

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

Ha a k. dobásra dob fejet $2^{k-1} - \left(\sum_{l=0}^{k-2} 2^l\right) = 1$ peták a nyereménye

Így az a) kérdésre a válasz:

$$\mathbb{E}(Ny) = \sum_{k=1}^{\infty} 1 \cdot \mathrm{P}(F = k) = \sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1$$

hiszen $p = q = \frac{1}{2}$

Geometriai Eloszlás Példa Megoldása II

b) Ha $2^k - 1$ petákom van az pont k dobásra elég
$(2^k - 1 = \sum_{l=0}^{k-1} 2^l)$

Geometriai Eloszlás Példa Megoldása II

b) Ha $2^k - 1$ petákom van az pont k dobásra elég
$(2^k - 1 = \sum_{l=0}^{k-1} 2^l)$

Ekkor a nyeremény várható értéke

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Ny) &= \sum_{l=1}^{k} 1 \cdot P(F = l) - (2^k - 1)P(F > k) \\
&= p(1 + q + q^2 + \cdots + q^{k-1}) - (2^k - 1)P(F > k) \\
&= p\frac{1 - q^k}{1 - q} - (2^k - 1)P(F > k) = \\
&= 1 - q^k - (2^k - 1)q^k = 1 - \frac{1}{2^k} - (2^k - 1)\frac{1}{2^k} = 0
\end{aligned}$$

Példa Poisson Eloszlásra

Egy ambiciózus házasságszédelgő tapasztalata szerint telefon-számos hirdetéseire az első napi jelentkezők száma átlagos száma 4, a második napi átlagos jelentkezők száma 2. Mi a valószínűsége hogy az első két nap csak 3 hívást kap?

Példa Poisson Eloszlásra

Egy ambiciózus házasságszédelgő tapasztalata szerint telefon-számos hirdetéseire az első napi jelentkezők száma átlagos száma 4, a második napi átlagos jelentkezők száma 2. Mi a valószínűsége hogy az első két nap csak 3 hívást kap?

Megoldás: Legyen H =hívások száma az első két napon.

Példa Poisson Eloszlásra

Egy ambiciózus házasságszédelgő tapasztalata szerint telefon-számos hirdetéseire az első napi jelentkezők száma átlagos száma 4, a második napi átlagos jelentkezők száma 2. Mi a valószínűsége hogy az első két nap csak 3 hívást kap?

Megoldás: Legyen H =hívások száma az első két napon.

Az első napon a hívások száma H_1 Poisson 4 paraméterrel.

Példa Poisson Eloszlásra

Egy ambiciózus házasságszédelgő tapasztalata szerint telefon-számos hirdetéseire az első napi jelentkezők száma átlagos száma 4, a második napi átlagos jelentkezők száma 2. Mi a valószínűsége hogy az első két nap csak 3 hívást kap?

Megoldás: Legyen H =hívások száma az első két napon.

Az első napon a hívások száma H_1 Poisson 4 paraméterrel.

A második napon a hívások száma H_2 Poisson 2 paraméterrel.

Példa Poisson Eloszlásra

Egy ambiciózus házasságszédelgő tapasztalata szerint telefon-számos hirdetéseire az első napi jelentkezők száma átlagos száma 4, a második napi átlagos jelentkezők száma 2. Mi a valószínűsége hogy az első két nap csak 3 hívást kap?

Megoldás: Legyen H =hívások száma az első két napon.

Az első napon a hívások száma H_1 Poisson 4 paraméterrel.

A második napon a hívások száma H_2 Poisson 2 paraméterrel.

Mivel $H = H_1 + H_2$ és Poissonok összege Poisson, (várható értéke pedig nyilván 6) ezért $H \sim Poi(6)$

Példa Poisson Eloszlásra

Egy ambiciózus házasságszédelgő tapasztalata szerint telefon-számos hirdetéseire az első napi jelentkezők száma átlagos száma 4, a második napi átlagos jelentkezők száma 2. Mi a valószínűsége hogy az első két nap csak 3 hívást kap?

Megoldás: Legyen H =hívások száma az első két napon.

Az első napon a hívások száma H_1 Poisson 4 paraméterrel.

A második napon a hívások száma H_2 Poisson 2 paraméterrel.

Mivel $H = H_1 + H_2$ és Poissonok összege Poisson, (várható értéke pedig nyilván 6) ezért $H \sim Poi(6)$

A keresett valószínűség:

$$\mathrm{P}(H = 3) = \frac{6^3}{3!}\,\mathrm{e}^{-6} \approx 0.08923$$