Nevezetes Eloszlások II. — Abszolult folytonos eloszlások

dr. Farkas Lóránt Ernő

2020 tavasz

Mikor használunk exponenciális eloszlást? Eloszlásfüggvény

Olyan időintervallum hosszára, amikor várok valaminek a bekövetkeztére sokszor használunk exponenciális eloszlást.

Mikor használunk exponenciális eloszlást? Eloszlásfüggvény

Olyan időintervallum hosszára, amikor várok valaminek a bekövetkeztére sokszor használunk exponenciális eloszlást.
Például: Egy telefonközpontban két hívás közt eltelt idő. Egy egyszerű alkatrész élettartama. Nukleáris bomlás.

Mikor használunk exponenciális eloszlást? Eloszlásfüggvény

Olyan időintervallum hosszára, amikor várok valaminek a bekövetkeztére sokszor használunk exponenciális eloszlást. Például: Egy telefonközpontban két hívás közt eltelt idő. Egy egyszerű alkatrész élettartama. Nukleáris bomlás.

Nézzünk például, hogy ha egy óra alatt átlagosan λ telefonhívás érkezik akkor mennyi a két hívás között eltelt T idő hosszának eloszlásfüggvénye?

Mikor használunk exponenciális eloszlást? Eloszlásfüggvény

Olyan időintervallum hosszára, amikor várok valaminek a bekövetkeztére sokszor használunk exponenciális eloszlást.
Például: Egy telefonközpontban két hívás közt eltelt idő. Egy egyszerű alkatrész élettartama. Nukleáris bomlás.
Nézzünk például, hogy ha egy óra alatt átlagosan λ telefonhívás érkezik akkor mennyi a két hívás között eltelt T idő hosszának eloszlásfüggvénye?
Tudjuk, hogy a telefonhívások száma Poisson eloszlású (sok telefonhívás van, de kicsi az esélye hogy pont ezt a számot hívják).
Tegyük fel hogy pont egy telefonhívás után vagyunk. Ekkor annak a valószínűsége, hogy t, ($t \in \mathbb{R}^+$) óráig nem jön újabb hívás:
$\mathrm{P}(T \geq t) = \mathrm{P}(S = 0)$, ahol $S \sim Poi(t\lambda)$ vagyis

$$\mathrm{P}(T < t) = 1 - \mathrm{P}(S = 0) = 1 - \frac{(t\lambda)^0}{0!}\mathrm{e}^{-t\lambda} = 1 - e^{-t\lambda} = F(t)$$

Sűrűségfüggvénye, várható értéke

Az exponenciális eloszlás eloszlásfüggvénye tehát:

$$F(x) = \mathrm{P}(T < x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-x\lambda}, & x > 0 \end{cases}$$

Sűrűségfüggvénye, várható értéke

Az exponenciális eloszlás eloszlásfüggvénye tehát:

$$F(x) = \mathrm{P}(T < x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-x\lambda}, & x > 0 \end{cases}$$

Így a sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda\,\mathrm{e}^{-x\lambda}, & x > 0 \end{cases}$$

Sűrűségfüggvénye, várható értéke

Az exponenciális eloszlás eloszlásfüggvénye tehát:

$$F(x) = \mathrm{P}(T < x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1 - \mathrm{e}^{-x\lambda}, & x > 0 \end{cases}$$

Így a sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \lambda\,\mathrm{e}^{-x\lambda}, & x > 0 \end{cases}$$

Várható értéke:

$$\mathbb{E}(T) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{0}^{\infty} x\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \lim_{M\to\infty} \left[-x\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^M + \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x} \cdot 1\,\mathrm{d}x = \lim_{M\to\infty} \left[-\frac{1}{\lambda}\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^M =$$

$$= \left[0 - \left(-\frac{1}{\lambda}\right)\right] = \frac{1}{\lambda}$$

Szórása

A szóráshoz kell:

$$\mathbb{D}(T) = \sqrt{\mathbb{D}^2(T)} = \sqrt{\mathbb{E}(T^2) - (\mathbb{E}(T))^2}$$

Szórása

A szóráshoz kell:

$$\mathbb{D}(T) = \sqrt{\mathbb{D}^2(T)} = \sqrt{\mathbb{E}(T^2) - (\mathbb{E}(T))^2}$$

Ekkor a második momentuma:

$$\mathbb{E}(T^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} x^2 \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \lim_{M \to \infty} \left[-x^2\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^M + \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x} \cdot 2x\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{2}{\lambda} \int_0^{\infty} x\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\lambda^2}$$

Szórása

A szóráshoz kell:

$$\mathbb{D}(T) = \sqrt{\mathbb{D}^2(T)} = \sqrt{\mathbb{E}(T^2) - (\mathbb{E}(T))^2}$$

Ekkor a második momentuma:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(T^2) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\infty} x^2 \lambda\, \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \\ &= \lim_{M\to\infty} \left[-x^2\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^M + \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-\lambda x} \cdot 2x\,\mathrm{d}x = \\ &= \frac{2}{\lambda}\int_0^{\infty} x\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\lambda^2}\end{aligned}$$

Ekkor szórása:

$$\mathbb{D}(T) = \sqrt{\mathbb{E}(T^2) - (\mathbb{E}(T))^2} = \sqrt{\frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2}} = \frac{1}{\lambda}$$

Örökifijú tulajdonság

Az exponenciális eloszlás örökifijú, ami azt jelenti hogy ha egy ideig még nem következett be az esemény amire várok, akkor az olyan mintha most kezdenék várni rá.

Örökifijú tulajdonság

Az exponenciális eloszlás örökifijú, ami azt jelenti hogy ha egy ideig még nem következett be az esemény amire várok, akkor az olyan mintha most kezdeném várni rá.

Képlettel:

$$\mathrm{P}(T > a+b | T > a) = \frac{\mathrm{P}(T > a+b)}{\mathrm{P}(T > a)} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(a+b)}}{\mathrm{e}^{-\lambda a}} = \mathrm{e}^{-\lambda b} = \mathrm{P}(T > b)$$

Örökifijú tulajdonság

Az exponenciális eloszlás örökifijú, ami azt jelenti hogy ha egy ideig még nem következett be az esemény amire várok, akkor az olyan mintha most kezdeném várni rá.

Képlettel:

$$\mathrm{P}(T > a+b | T > a) = \frac{\mathrm{P}(T > a+b)}{\mathrm{P}(T > a)} = \frac{\mathrm{e}^{-\lambda(a+b)}}{\mathrm{e}^{-\lambda a}} = \mathrm{e}^{-\lambda b} = \mathrm{P}(T > b)$$

Például:

$$\mathrm{P}(T > 15 | T > 5) = \mathrm{P}(T > 10)$$

Örökifijú tulajdonság

Az exponenciális eloszlás örökifijú, ami azt jelenti hogy ha egy ideig még nem következett be az esemény amire várok, akkor az olyan mintha most kezdeném várni rá.

Képlettel:

$$P(T > a+b | T > a) = \frac{P(T > a + b)}{P(T > a)} = \frac{e^{-\lambda(a+b)}}{e^{-\lambda a}} = e^{-\lambda b} = P(T > b)$$

Például:

$$P(T > 15 | T > 5) = P(T > 10)$$

Hasonlóan:

$$P(T < 15 | T > 5) = P(T < 10)$$

Örökifijú tulajdonság

Az exponenciális eloszlás örökifijú, ami azt jelenti hogy ha egy ideig még nem következett be az esemény amire várok, akkor az olyan mintha most kezdenék várni rá.

Képlettel:

$$P(T > a+b | T > a) = \frac{P(T > a+b)}{P(T > a)} = \frac{e^{-\lambda(a+b)}}{e^{-\lambda a}} = e^{-\lambda b} = P(T > b)$$

Például:

$$P(T > 15 | T > 5) = P(T > 10)$$

Hasonlóan:

$$P(T < 15 | T > 5) = P(T < 10)$$

Sőt ez visszafele is igaz, ha egy eloszlás örökifijú tulajdonságú akkor exponenciális.

Példa exponenciális eloszlásra

Példa: Egy bizonyos típusú villanykörte élettartama örökifijú eloszlású valószínűségi változó, melynek szórása 3 év. Mennyi a várható értéke? Ha egy körtét már két éve vettünk, de még működik, akkor mi a valószínűsége, hogy 3 év múlva is működni fog.

Példa exponenciális eloszlásra

Példa: Egy bizonyos típusú villanykörte élettartama örökifijú eloszlású valószínűségi változó, melynek szórása 3 év. Mennyi a várható értéke? Ha egy körtét már két éve vettünk, de még működik, akkor mi a valószínűsége, hogy 3 év múlva is működni fog.

Megoldás: Legyen $V =$ a villanykörte élettartama. Tudjuk, hogy $V \sim Exp(\lambda)$ mivel örökifijú.

Példa exponenciális eloszlásra

Példa: Egy bizonyos típusú villanykörte élettartama örökifijú eloszlású valószínűségi változó, melynek szórása 3 év. Mennyi a várható értéke? Ha egy körtét már két éve vettünk, de még működik, akkor mi a valószínűsége, hogy 3 év múlva is működni fog.

Megoldás: Legyen $V =$ a villanykörte élettartama. Tudjuk, hogy $V \sim Exp(\lambda)$ mivel örökifijú.

Mivel $\mathbb{D}(V) = 3 = \frac{1}{\lambda}$ ezért $\lambda = \frac{1}{3}$.

Példa exponenciális eloszlásra

Példa: Egy bizonyos típusú villanykörte élettartama örökifijú eloszlású valószínűségi változó, melynek szórása 3 év. Mennyi a várható értéke? Ha egy körtét már két éve vettünk, de még működik, akkor mi a valószínűsége, hogy 3 év múlva is működni fog.

Megoldás: Legyen $V =$ a villanykörte élettartama. Tudjuk, hogy $V \sim Exp(\lambda)$ mivel örökifijú.

Mivel $\mathbb{D}(V) = 3 = \frac{1}{\lambda}$ ezért $\lambda = \frac{1}{3}$.

$\mathbb{E}(V) = \frac{1}{\lambda}$ ezért $\mathbb{E}(V) = 3$.

Példa exponenciális eloszlásra

Példa: Egy bizonyos típusú villanykörte élettartama örökifijú eloszlású valószínűségi változó, melynek szórása 3 év. Mennyi a várható értéke? Ha egy körtét már két éve vettünk, de még működik, akkor mi a valószínűsége, hogy 3 év múlva is működni fog.

Megoldás: Legyen $V =$ a villanykörte élettartama. Tudjuk, hogy $V \sim Exp(\lambda)$ mivel örökifijú.

Mivel $\mathbb{D}(V) = 3 = \frac{1}{\lambda}$ ezért $\lambda = \frac{1}{3}$.

$\mathbb{E}(V) = \frac{1}{\lambda}$ ezért $\mathbb{E}(V) = 3$.

Annak a valószínűsége, hogy 2 évig égett, és még 3-ig fog:

$$\mathrm{P}(V \geq 5 | V > 2) = \mathrm{P}(V \geq 3) = 1 - \mathrm{P}(V < 3) = 1 - (1 - e^{-3\lambda}) = e^{-1}$$

Mikor használunk Egyenletes eloszlást? Sűrűségfüggvény

Ha egy véletlen érték biztosan a és b érték közé esik, de semmilyen más információ nem tudott róla, akkor $[a, b]$-n egyenletes eloszlást kell használni —jelölés: $Uni(a, b)$.

Mikor használunk Egyenletes eloszlást? Sűrűségfüggvény

Ha egy véletlen érték biztosan a és b érték közé esik, de semmilyen más információ nem tudott róla, akkor $[a, b]$-n egyenletes eloszlást kell használni —jelölés: $Uni(a, b)$.

Például: Világutazó barátom részegen felhív és mikor fut be a hívás egyneletes [0, 24]-en. Egy 1 méter hosszú kötélnek van piros és kék vége. Tökéletesen összeragasztom a két végét, hogy egy kört kapjak, majd megpörgetem ezt a kört egy olló nyitott szárai között, majd elcsattintom az ollót. Újra szétszedem a kötelet az összeragasztásnál, akkor a piros végű darab hossza egyenletes eloszású [0, 1]-en.

Sűrűségfüggvénye, Eloszlásfüggvénye

Az egyenletes eloszlásnál minden lehetséges értéknek ugyanakkor súlyt adunk.

Sűrűségfüggvénye, Eloszlásfüggvénye

Az egyenletes eloszlásnál minden lehetséges értéknek ugyanakkor súlyt adunk.

Így az [a, b]-n egyenletes eloszlás sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a, b] \\ 0, & x \notin [a, b] \end{cases}$$

Sűrűségfüggvénye, Eloszlásfüggvénye

Az egyenletes eloszlásnál minden lehetséges értéknek ugyanakkor súlyt adunk.

Így az [a, b]-n egyenletes eloszlás sűrűségfüggvénye:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & x \notin [a,b] \end{cases}$$

Eloszlásfüggvénye:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{dt} = \left[\frac{t}{b-a}\right]_a^x = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 1, & x > b \end{cases}$$

Várható értéke, Második momentuma

Legyen $U \sim Uni(a,b)$, a sűrűségfüggvénnyel kiszámíthatjuk a várható értéket:

Várható értéke, Második momentuma

Legyen $U \sim Uni(a,b)$, a sűrűségfüggvénnyel kiszámíthatjuk a várható értéket:

$$\mathbb{E}(U) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{dx} = \int_a^b x\frac{1}{b-a}\,\mathrm{dx} =$$
$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

Várható értéke, Második momentuma

Legyen $U \sim Uni(a,b)$, a sűrűségfüggvénnyel kiszámíthatjuk a várható értéket:

$$\mathbb{E}(U) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\,\mathrm{dx} = \int_a^b x \frac{1}{b-a}\,\mathrm{dx} =$$
$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

Szóráshoz kell:

$$\mathbb{E}(U^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f(x)\,\mathrm{dx} = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a}\,\mathrm{dx} =$$
$$= \frac{1}{b-a}\left[\frac{x^3}{3}\right]_a^b = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

Szórása

Tehát: $\mathbb{E}(U^2) = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$

Szórása

Tehát: $\mathbb{E}(U^2) = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$

$$\mathbb{D}(U) = \sqrt{\mathbb{E}(U^2) - (\mathbb{E}(U))^2}$$

Szórása

Tehát: $\mathbb{E}(U^2) = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$

$\mathbb{D}(U) = \sqrt{\mathbb{E}(U^2) - (\mathbb{E}(U))^2}$

Ebből $\mathbb{D}^2(U) = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{b^2+2ab+a^2}{4} = \frac{b^2-2ab+a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$

Szórása

Tehát: $\mathbb{E}(U^2) = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$

$\mathbb{D}(U) = \sqrt{\mathbb{E}(U^2) - (\mathbb{E}(U))^2}$

Ebből $\mathbb{D}^2(U) = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{b^2+2ab+a^2}{4} = \frac{b^2-2ab+a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$

Tehát $\mathbb{D}(U) = \frac{|b-a|}{\sqrt{12}}$

Az egyenletes eloszlás egy matematikailag fontos tulajdonsága

Legyen X egy absz folytonos eloszlású valószínűségi változó, aminek eloszlásfüggvénye F. Mi lesz $F(X)$ eloszlása?

Az egyenletes eloszlás egy matematikailag fontos tulajdonsága

Legyen X egy absz folytonos eloszlású valószínűségi változó, aminek eloszlásfüggvénye F. Mi lesz $F(X)$ eloszlása?

Megoldás: Mivel X abszolult folytonos ezért F invertálható függvény, tehát minden $a \in [0,1]$-re:

$$\mathrm{P}(F(X) < a) = \mathrm{P}(X < F^{-1}(a)) = F(F^{-1}(a)) = a$$

Az egyenletes eloszlás egy matematikailag fontos tulajdonsága

Legyen X egy absz folytonos eloszlású valószínűségi változó, aminek eloszlásfüggvénye F. Mi lesz $F(X)$ eloszlása?

Megoldás: Mivel X abszolult folytonos ezért F invertálható függvény, tehát minden $a \in [0,1]$-re:

$$P(F(X) < a) = P(X < F^{-1}(a)) = F(F^{-1}(a)) = a$$

Vagyis $F(X)$ egyenletes eloszlású [0, 1]-en.

Az egyenletes eloszlás egy matematikailag fontos tulajdonsága

Legyen X egy absz folytonos eloszlású valószínűségi változó, aminek eloszlásfüggvénye F. Mi lesz $F(X)$ eloszlása?

Megoldás: Mivel X abszolult folytonos ezért F invertálható függvény, tehát minden $a \in [0, 1]$-re:

$$\mathrm{P}(F(X) < a) = \mathrm{P}(X < F^{-1}(a)) = F(F^{-1}(a)) = a$$

Vagyis $F(X)$ egyenletes eloszlású [0, 1]-en.
Ez fordítva is igaz, ha lenne [0, 1]-en egyenletes eloszlású valószínűségi változóm (pl. U) akkor ebből bármilyen abszolult folytonos eloszlású valószínűségi változót tudok csinálni (ti. $F^{-1}(U)$ eloszlása F lesz).

Az egyenletes eloszlás egy matematikailag fontos tulajdonsága

Legyen X egy absz folytonos eloszlású valószínűségi változó, aminek eloszlásfüggvénye F. Mi lesz $F(X)$ eloszlása?

Megoldás: Mivel X abszolult folytonos ezért F invertálható függvény, tehát minden $a \in [0,1]$-re:

$$\mathrm{P}(F(X) < a) = \mathrm{P}(X < F^{-1}(a)) = F(F^{-1}(a)) = a$$

Vagyis $F(X)$ egyenletes eloszlású [0, 1]-en.
Ez fordítva is igaz, ha lenne [0, 1]-en egyenletes eloszlású valószínűségi változóm (pl. U) akkor ebből bármilyen abszolult folytonos eloszlású valószínűségi változót tudok csinálni (ti. $F^{-1}(U)$ eloszlása F lesz).
Ebből az is következik, hogy bármilyen absz. folytonos eloszlásból —megfelelő matematikai transzformációk után— bármilyen másik absz. folytonos eloszlást szimulálhatok.

Példa az egyenletes eloszlásra

Példa: Han Solo egy társkereső szolgáltatásra regisztrálta magát. Egy lila bőrű humanoid nő profilképe megtetszik neki, és randit beszélnek meg. A profilja alapján csak azt tudja, hogy 160 és 200 cm közötti a magassága. Mi a valószínűsége, hogy 175 cm-nél magasabb, de 185 cm-nél alacsonyabb?

Példa az egyenletes eloszlásra

Példa: Han Solo egy társkereső szolgáltatásra regisztrálta magát. Egy lila bőrű humanoid nő profilképe megtetszik neki, és randit beszélnek meg. A profilja alapján csak azt tudja, hogy 160 és 200 cm közötti a magassága. Mi a valószínűsége, hogy 175 cm-nél magasabb, de 185 cm-nél alacsonyabb?

Megoldás: egyenletes eloszlást használjunk. Ekkor legyen $M =$ az illető magassága. Tudjuk, hogy $M \sim Uni[160,200]$. Ekkor:

Példa az egyenletes eloszlásra

Példa: Han Solo egy társkereső szolgáltatásra regisztrálta magát. Egy lila bőrű humanoid nő profilképe megtetszik neki, és randit beszélnek meg. A profilja alapján csak azt tudja, hogy 160 és 200 cm közötti a magassága. Mi a valószínűsége, hogy 175 cm-nél magasabb, de 185 cm-nél alacsonyabb?

Megoldás: egyenletes eloszlást használjunk. Ekkor legyen $M =$ az illető magassága. Tudjuk, hogy $M \sim Uni[160{,}200]$. Ekkor:

$\mathrm{P}(175 < M < 185) = F(185) - F(175) = \frac{185-160}{200-160} - \frac{175-160}{200-160} = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$

Példa az egyenletes eloszlásra

Példa: Han Solo egy társkereső szolgáltatásra regisztrálta magát. Egy lila bőrű humanoid nő profilképe megtetszik neki, és randit beszélnek meg. A profilja alapján csak azt tudja, hogy 160 és 200 cm közötti a magassága. Mi a valószínűsége, hogy 175 cm-nél magasabb, de 185 cm-nél alacsonyabb?

Megoldás: egyenletes eloszlást használjunk. Ekkor legyen $M =$ az illető magassága. Tudjuk, hogy $M \sim Uni[160{,}200]$. Ekkor:

$\mathrm{P}(175 < M < 185) = F(185) - F(175) = \frac{185-160}{200-160} - \frac{175-160}{200-160} = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$

Jegyezzük meg: $P(a \leq X < b) = F_X(b) - F_X(a)$!