Nevezetes Eloszlások II. — Folytonos eloszlások, gyakorlat

dr. Farkas Lóránt Ernő

2020 tavasz

Példa Exponenciális Eloszlásra

Példa: A polóniumatom bomlási ideje örökifijú tulajdonságú valószínűségi változó. Egy ilyen atom felezési ideje 140 nap.

Példa Exponenciális Eloszlásra

Példa: A polóniumatom bomlási ideje örökifijú tulajdonságú valószínűségi változó. Egy ilyen atom felezési ideje 140 nap.

a) Mennyi a polóniumatom várható értéke és szórása?

Példa Exponenciális Eloszlásra

Példa: A polóniumatom bomlási ideje örökifijú tulajdonságú valószínűségi változó. Egy ilyen atom felezési ideje 140 nap.

a) Mennyi a polóniumatom várható értéke és szórása?
b) Ha valakinél nagyobb mennyiség van, mekkora az az időtartam amikor a polóniumatomok 95%-a elbomlik?

A Példa Megoldása

Legyen a valószínúségi változóm neve: $PE =$A polóniumatom élettartama.

A Példa Megoldása

Legyen a valószínűségi változóm neve: $PE =$A polóniumatom élettartama.

Tudjuk, hogy: $PE \sim Exp(\lambda)$

A Példa Megoldása

Legyen a valószínűségi változóm neve: $PE =$A polóniumatom élettartama.

Tudjuk, hogy: $PE \sim Exp(\lambda)$

Vajon mennyi $\lambda =?$

A Példa Megoldása

Legyen a valószínűségi változóm neve: PE =A polóniumatom élettartama.

Tudjuk, hogy: $PE \sim Exp(\lambda)$

Vajon mennyi $\lambda =$?

Tudjuk, hogy $\mathrm{P}(PE < 140) = F(140) = \frac{1}{2}$ (hiszen ha sok atomom van a fele bomlik el 140 nap alatt)

A Példa Megoldása

Legyen a valószínűségi változóm neve: $PE =$A polóniumatom élettartama.

Tudjuk, hogy: $PE \sim Exp(\lambda)$

Vajon mennyi $\lambda =$?

Tudjuk, hogy $P(PE < 140) = F(140) = \frac{1}{2}$ (hiszen ha sok atomom van a fele bomlik el 140 nap alatt)

$$F(140) = 1 - e^{-140\lambda} = \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{2} = e^{-140\lambda}$$
$$-\ln(2) = -140\lambda$$
$$\frac{\ln(2)}{140} = \lambda$$

A Példa Megoldása II

Ekkor a várható értéke $\frac{1}{\lambda} = \frac{140}{\ln(2)} \approx 201{,}9$

A Példa Megoldása II

Ekkor a várható értéke $\frac{1}{\lambda} = \frac{140}{\ln(2)} \approx 201{,}9$

b) azt az x-et keressük melyre

A Példa Megoldása II

Ekkor a várható értéke $\frac{1}{\lambda} = \frac{140}{\ln(2)} \approx 201{,}9$

b) azt az x-et keressük melyre

$\mathrm{P}(PE < x) = F(x) = 0{,}95$

A Példa Megoldása II

Ekkor a várható értéke $\frac{1}{\lambda} = \frac{140}{\ln(2)} \approx 201{,}9$

b) azt az x-et keressük melyre

$P(PE < x) = F(x) = 0{,}95$

$$F(x) = 1 - e^{-x\frac{\ln(2)}{140}} = 0{,}95$$

$$0{,}05 = e^{-x\frac{\ln(2)}{140}}$$

$$\ln\left(\frac{1}{20}\right) = -x\frac{\ln(2)}{140}$$

$$\frac{\ln(20)}{\ln(2)}140 = x \approx 605{,}06$$

Példa Exponenciális Eloszlásra

Példa: Egy kazán megjavításának hossza exponenciális valószínűségi változó, melynek várható értéke 2 óra. Feltéve, hogy 5 órája már szerelik a kazánt mi az az időpont amikor 90% hogy végeznek?

Példa Exponenciális Eloszlásra

Példa: Egy kazán megjavításának hossza exponenciális valószínűségi változó, melynek várható értéke 2 óra. Feltéve, hogy 5 órája már szerelik a kazánt mi az az időpont amikor 90% hogy végeznek?

Megoldás:

Példa Exponenciális Eloszlásra

Példa: Egy kazán megjavításának hossza exponenciális valószínűségi változó, melynek várható értéke 2 óra. Feltéve, hogy 5 órája már szerelik a kazánt mi az az időpont amikor 90% hogy végeznek?

Megoldás:

Legyen K =A kazán megjavításához szükséges idő

Példa Exponenciális Eloszlásra

Példa: Egy kazán megjavításának hossza exponenciális valószínűségi változó, melynek várható értéke 2 óra. Feltéve, hogy 5 órája már szerelik a kazánt mi az az időpont amikor 90% hogy végeznek?

Megoldás:

Legyen K =A kazán megjavításához szükséges idő

Ekkor $\mathbb{E}(K) = \frac{1}{\lambda} = 2$

Példa Exponenciális Eloszlásra

Példa: Egy kazán megjavításának hossza exponenciális valószínűségi változó, melynek várható értéke 2 óra. Feltéve, hogy 5 órája már szerelik a kazánt mi az az időpont amikor 90% hogy végeznek?

Megoldás:

Legyen K =A kazán megjavításához szükséges idő

Ekkor $\mathbb{E}(K) = \frac{1}{\lambda} = 2$

$\lambda = \frac{1}{2}$, $K \sim Exp(\frac{1}{2})$

Példa Exponenciális Eloszlásra

Példa: Egy kazán megjavításának hossza exponenciális valószínűségi változó, melynek várható értéke 2 óra. Feltéve, hogy 5 órája már szerelik a kazánt mi az az időpont amikor 90% hogy végeznek?

Megoldás:

Legyen $K =$A kazán megjavításához szükséges idő

Ekkor $\mathbb{E}(K) = \frac{1}{\lambda} = 2$

$\lambda = \frac{1}{2}$, $K \sim Exp(\frac{1}{2})$

Keressük azt a t-t melyre

Példa Exponenciális Eloszlásra

Példa: Egy kazán megjavításának hossza exponenciális valószínűségi változó, melynek várható értéke 2 óra. Feltéve, hogy 5 órája már szerelik a kazánt mi az az időpont amikor 90% hogy végeznek?

Megoldás:

Legyen K =A kazán megjavításához szükséges idő

Ekkor $\mathbb{E}(K) = \frac{1}{\lambda} = 2$

$\lambda = \frac{1}{2}$, $K \sim Exp(\frac{1}{2})$

Keressük azt a t-t melyre

$\mathrm{P}(K < t + 5 | K > 5) = 0{,}95$ mivel örökifijú:

Példa Exponenciális Eloszlásra

Példa: Egy kazán megjavításának hossza exponenciális valószínűségi változó, melynek várható értéke 2 óra. Feltéve, hogy 5 órája már szerelik a kazánt mi az az időpont amikor 90% hogy végeznek?

Megoldás:

Legyen K =A kazán megjavításához szükséges idő

Ekkor $\mathbb{E}(K) = \frac{1}{\lambda} = 2$

$\lambda = \frac{1}{2}$, $K \sim Exp(\frac{1}{2})$

Keressük azt a t-t melyre

$\mathrm{P}(K < t + 5 | K > 5) = 0{,}95$ mivel örökifijú:

$P(K < t) = F(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} = 0{,}9$

Példa Exponenciális Eloszlásra

Példa: Egy kazán megjavításának hossza exponenciális valószínűségi változó, melynek várható értéke 2 óra. Feltéve, hogy 5 órája már szerelik a kazánt mi az az időpont amikor 90% hogy végeznek?

Megoldás:

Legyen K =A kazán megjavításához szükséges idő

Ekkor $\mathbb{E}(K) = \frac{1}{\lambda} = 2$

$\lambda = \frac{1}{2}$, $K \sim Exp(\frac{1}{2})$

Keressük azt a t-t melyre

$\mathrm{P}(K < t + 5 | K > 5) = 0{,}95$ mivel örökifijú:

$P(K < t) = F(t) = 1 - e^{-\frac{t}{2}} = 0{,}9$

Amiből $t = 2\ln(10) \approx 4{,}605 \approx 4$ óra 36 perc

Példa Egyenletes Eloszlásra

Példa: Egy r sugarú, kör alapú céltáblára lövések érkeznek. Tegyük fel, hogy minden lövés a céltáblába talál, és hogy a találat valószínűsége egyenletes eloszlású a céltáblán. Legyen a ξ valószínűségi változó értéke a találat helyének a céltábla középpontjától mért távolsága.

Példa Egyenletes Eloszlásra

Példa: Egy r sugarú, kör alapú céltáblára lövések érkeznek. Tegyük fel, hogy minden lövés a céltáblába talál, és hogy a találat valószínűsége egyenletes eloszlású a céltáblán. Legyen a ξ valószínűségi változó értéke a találat helyének a céltábla középpontjától mért távolsága.

a) Írjuk fel és ábrázoljuk ξ eloszlás- és sűrűségfüggvényét.

Példa Egyenletes Eloszlásra

Példa: Egy r sugarú, kör alapú céltáblára lövések érkeznek. Tegyük fel, hogy minden lövés a céltáblába talál, és hogy a találat valószínűsége egyenletes eloszlású a céltáblán. Legyen a ξ valószínűségi változó értéke a találat helyének a céltábla középpontjától mért távolsága.

a) Írjuk fel és ábrázoljuk ξ eloszlás- és sűrűségfüggvényét.
b) Ha tíz lövést adunk le, mi az eloszlása azoknak a találatok számának amik a középpontól $r/2$ távolságban húzott fekete körbe esnek?

Példa Egyenletes Eloszlásra

Példa: Egy r sugarú, kör alapú céltáblára lövések érkeznek. Tegyük fel, hogy minden lövés a céltáblába talál, és hogy a találat valószínűsége egyenletes eloszlású a céltáblán. Legyen a ξ valószínűségi változó értéke a találat helyének a céltábla középpontjától mért távolsága.

a) Írjuk fel és ábrázoljuk ξ eloszlás- és sűrűségfüggvényét.
b) Ha tíz lövést adunk le, mi az eloszlása azoknak a találatok számának amik a középpontól $r/2$ távolságban húzott fekete körbe esnek?
c) Mennyi lesz a fekete kört eltatláló lövések számának várható értéke, szórása?

A Példa Megoldása

a) Annak a valószínűsége, hogy $\mathrm{P}(\xi < x) = F(x)$

A Példa Megoldása

a) Annak a valószínűsége, hogy $\mathrm{P}(\xi < x) = F(x)$

A Példa Megoldása

a) Annak a valószínűsége, hogy $\mathrm{P}(\xi < x) = F(x)$

A Példa Megoldása

a) Annak a valószínűsége, hogy $P(\xi < x) = F(x)$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^2}{r^2}, & 0 \leq x \leq r \\ 1, & x > r \end{cases}$$

A Példa Megoldása

a) Annak a valószínűsége, hogy $\mathrm{P}(\xi < x) = F(x)$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{x^2}{r^2}, & 0 \le x \le r \\ 1, & x > r \end{cases}$$

A Példa Megoldása II

b) Annak a valószínűsége, hogy $P(\xi < r/2) = \frac{1}{4}$

A Példa Megoldása II

b) Annak a valószínűsége, hogy $\mathrm{P}(\xi < r/2) = \frac{1}{4}$

Legyen $T =$Találatok száma amik a fekete körbe esnek.

A Példa Megoldása II

b) Annak a valószínűsége, hogy $P(\xi < r/2) = \frac{1}{4}$

Legyen T =Találatok száma amik a fekete körbe esnek.

Ekkor $T \sim Bin(10, \frac{1}{4})$

A Példa Megoldása II

b) Annak a valószínűsége, hogy $P(\xi < r/2) = \frac{1}{4}$

Legyen $T =$Találatok száma amik a fekete körbe esnek.

Ekkor $T \sim Bin(10, \frac{1}{4})$

c) $\mathbb{E}(T) = np = 10\frac{1}{4} = 2{,}5$

A Példa Megoldása II

b) Annak a valószínűsége, hogy $P(\xi < r/2) = \frac{1}{4}$

Legyen T =Találatok száma amik a fekete körbe esnek.

Ekkor $T \sim Bin(10, \frac{1}{4})$

c) $\mathbb{E}(T) = np = 10\frac{1}{4} = 2{,}5$

$\mathbb{D}(T) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{10\frac{1}{4}\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{30}}{4} \approx 1{,}36$

Példa Egyenletes Eloszlásra

Példa: Mekkora valószínűséggel vesz fel egy, a $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó olyan értéket, amely a várható értékétől a szórásánál nagyobb értékkel tér el?

Példa Egyenletes Eloszlásra

Példa: Mekkora valószínűséggel vesz fel egy, a $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó olyan értéket, amely a várható értékétől a szórásánál nagyobb értékkel tér el?

Megoldás: Legyen $U \sim Uni(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

Példa Egyenletes Eloszlásra

Példa: Mekkora valószínűséggel vesz fel egy, a $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó olyan értéket, amely a várható értékétől a szórásánál nagyobb értékkel tér el?

Megoldás: Legyen $U \sim Uni(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

Ekkor $\mathbb{E}(U) = 0$, $\mathbb{D}(U) = \frac{\sqrt{3}-(-\sqrt{3})}{\sqrt{12}} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 1$

Példa Egyenletes Eloszlásra

Példa: Mekkora valószínűséggel vesz fel egy, a $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó olyan értéket, amely a várható értékétől a szórásánál nagyobb értékkel tér el?

Megoldás: Legyen $U \sim Uni(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

Ekkor $\mathbb{E}(U) = 0$, $\mathbb{D}(U) = \frac{\sqrt{3}-(-\sqrt{3})}{\sqrt{12}} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 1$

Tehát a keresett valószínűség:

$$P(U < -1 \cup U > 1) = 2P(U < -1) = 2\frac{-1-(-\sqrt{3})}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}$$