1 a) Egy bálon 15 fiú és 15 lány vesz részt. A táncoló pároknak hányféle összetétele lehetséges, ha mindenki táncol (és fiú csak lánnyal, lány csak fiúval táncolhat)? *(15!)*

b) Mi a valószínűsége, hogy Éva Ádámmal táncol? $\left(\frac{14!}{15!} = \frac{1}{15}\right)$

2 Néhány golyót 720-féleképpen rakhatunk sorba. Hány golyónk lehet, ha mindegyik különböző színű? *(6!)*

3 a) Egy dobozban 16 golyó van, közülük 8 fehér, 5 piros és 3 kék színű. Hányféle sorrendben húzhatjuk ki egymás után a 16 golyót, ha az egyszínűeket nem különböztetjük meg? $\left(\frac{16!}{8!5!3!}\right)$

b) Mi a valószínűsége, hogy a golyókat sorban kihúzva az utolsó kettő fehér? $\left(\frac{\frac{14!\cdot 7\cdot 8}{8!5!3!}}{\frac{16!}{8!5!3!}} = \frac{8}{16}\frac{7}{15}\right)$

4 Van 20 darab különböző érmém. Hozzárakok 4 darab ugyanolyan érmét. Hányféleképp rakhatom őket sorba, ha az ugyanolyan érmék emgymással való felcsrélését nem különböztetem meg? $\left(\frac{24!}{4!(1!)^{20}}\right)$

5 a) Hányféle négyjegyű PIN kód van? $\left(10^4\right)$

b) Ha kisfiam megleste a (4 jegyű) PIN kódom második és harmadik számjegyét mi a valószínűsége, hogy 3 próbálkozásból kitalálja a kódot?(Már okos és mindig mást próbál.) $\left(\frac{3}{100}\right)$

6 a) Hányféleképp szerezhetnek pontot a versenyzők egy Forma 1 es futamon, ha 25 fő indul?(Az első 10 kap pontot) $\left(25\cdot 24\cdots 16 = \frac{25!}{15!}\right)$

b) Feltéve, hogy egy különös kór miatt ezen a hétvégén mindenki ugyanannyira jól versenyez, mi a valószínűsége, hogy az első díjat Hamilton, a harmadikat pedig Leclerc nyeri? $\left(\frac{\frac{23!}{15!}}{\frac{25!}{15!}} = \frac{1}{25}\frac{1}{24}\right)$

7 a) Hányféleképp lehet kitölteni egy 5-ös Lottó szelvényt? $\left(\binom{90}{5}\right)$

b) Mi a valószínűsége, hogy az 5-ös Lottón 4 találatom lesz? $\left(\frac{\binom{5}{4}\binom{85}{1}}{\binom{90}{5}}\right)$

8 Egy 7 tagú társaságban mindenki mindenkivel kezet fog. Hány kézfogás ez összesen? $\left(Ez\ \binom{7}{2}\ db.\ kézfogás\right)$

9 Hányféleképp vehetünk 4 sütit a 20 féle sütiből a sütiboltban? *A sütivásárlásokat pötty-vonal kombinációként kódoljuk el. Pl: ha az első fajta sütiből 2 sütit vettem akkor leírok két pöttyöt aztán húzok egy vonalat, ha a másodikból nem vettem semmit akkor megint vonalat húzok, stb. Így 4 pöttyből és 19 vonalból álló sorozattal egyértelműen elkódolhatok egy sütivásárlást. A pötty vonal kódok száma az ismétléses permutációk miatt:* $\binom{23}{4}$.

10 22 futballistából két csapatot sorsolnak ki véletlenszerűen. Mi a valószínűsége, hogy a két legjobb játékos egy csapatba kerül? *Az egyik csapat leveszi a pólót.* $\binom{22}{11}$ *féle módon vehetik le a pólót a játékosok. A „jó" esetek száma pedig: ha mindkét jó játékos leveszi akkor* $\binom{20}{9}$ *ha egyik sem* $\binom{20}{11}$. *Tehát a végeredmény* $\frac{\binom{20}{9}+\binom{20}{11}}{\binom{22}{11}} = 2\frac{\binom{20}{9}}{\binom{22}{11}}$

11 Egyszerre dobunk 6 szabályos dobókockával. Mi a valószínűsége annak, hogy legalább két kockán azonos pontszámot kapunk?*Nyilván a komplementerét számoljuk ki:*$\left(1 - \frac{6!}{6^6}\right)$

Házi Feladatok

1 Egy középiskolában 5 különböző díjat osztanak ki. 78 tanuló van. Hányféleképp lehet kiosztani a díjakat, ha

a) Egy ember csak egy díjat kaphat?$\left(\frac{78!}{73!}\right)$

b) Egy ember több díjat is kaphat?$\left(78^5\right)$

2 Mi a valószínűsége, hogy az 5-ös Lottón 3,2,1 vagy 0 találatom lesz? $\left(\frac{\binom{5}{3}\binom{85}{2}}{\binom{90}{5}}, \frac{\binom{5}{2}\binom{85}{3}}{\binom{90}{5}}, \frac{\binom{5}{1}\binom{85}{4}}{\binom{90}{5}}, \frac{\binom{85}{5}}{\binom{90}{5}}\right)$

3 Egy vendéglő egyik asztalánál ülő 8 vendég 2 sört 4 üdítőt 2 kávét rendel. A pincér véletlenszerűen osztja ki az italokat. Mi a valószínűsége hogy mindenki azt kapja amit rendel?$\left(\frac{8!2!4!2!}{16!}\right)$

4 (*) Egy 32 lapos magyar kártyát megkeverek. Tegyük fel hogy van 32 dedikált helyem a 32 kártyalapnak. A megkevert pakliból (képpel lefelé) lerakok 28 kártyát az első 28 helyre, a négy ász helyét szabadon hagyom. Az utolsó négy lapnál a következőképp járok el: felfordítom a lapot ha ász, akkor lerakom a neki megfelelő helyre, ha nem ász, akkor képpel felfelé lerakom a helyére, az ott lévő lapot is megfordítom, lerakom a helyére, és így tovább, addig amíg ászhoz nem érek (és azt is lerakom képpel felfelé a helyére). Mi a valószínűsége, hogy miután leraktam az összes lapot, minden lap képpel felfele fordítva a helyén van?*Nehéz, azért csillagos. A megoldás* $\frac{4}{32} = \frac{1}{8}$. *Számozzuk be a lapokat 1-től 32-ig. Legyen a négy ász 1, 2, 3, 4. Nyilván az összes lehetséges permutáció=32!. A permutációk ciklikus ábrázolási módja ad egy helyes megoldást a „jó" permutációk számára: Egy permutáció leírható ciklikus permutéciókkal, pl (1->3,3->5,5->1) ciklus leírható úgy, hogy (135). Ez az ábrázolás nem egyértelmű, mert (351) ugyanezt adja, de ha rögzítem, hogy a legkisebb elemmel kezdem akkor már egyértelmű. Az összes olyan permutációt keresem ahol 4 ciklus van, mindegyik elem valamelyik ciklusban van, a ciklusok diszjunktak és mindegyik ciklus 1, 2, 3, 4-el kezdődik(ezek azok a permutációk amik visszacsinálhatók amikor elkezdem felfordítgatni a lapokat), tehát ciklikus ábrázolásuk kb. így néz ki:* $(2\ldots)(1\ldots)(4\ldots)(3\ldots)$ *—ekkor először az 2. számú lap kerül a helyére aztán az 1. számú stb. Látható hogy* $4 \cdot 31!$ *ilyen abrázolás van (hiszen az első elmenek 1, 2, 3, 4-nek kell lennie) tehát a jó permutációk száma ugyanennyi. Így* $\frac{4 \cdot 31!}{32!} = \frac{4}{32}$