Név: ....

Neptun kód: ....

	1	2	3	$\sum$
E				
Gy				

Gyakorlat amire jársz:

Nagy Ilona	Szerda	Csütörtök
Benedekfi Örs		Csütörtök
Farkas Lóránt	Szerda	
Pataki Gergely	Szerda	Csütörtök
Szabó Sándor		Csütörtök

Elővizsgára elmennék Igen Nem

Elméleti feladatok

1 a) Mit jelent hogy két esemény független? *(5p)*
b) Mit mond ki a Bayes tétel? *(5p)*
c) Ha A és B olyan események melyre $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(A|B) = \frac{1}{2}$, akkor hogy viszonyul egymáshoz $\mathrm{P}(B)$ és $\mathrm{P}(B|A)$? *(5p)*

Megoldás:

a) Az A és B események függetlenek, ha $P(A \wedge B) = P(A \cap B) = P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B)$, ugyanígy jó, hogy függetlenek, ha $P(A|B) = P(A)$ (5p).

b) $P(A|B) = P(B|A) \cdot \frac{P(A)}{P(B)}$ (5p)

c) Ha $P(A) = P(A|B)$ akkor A és B függetlenek, tehát $P(B) = P(B|A)$.

2 a) Mikor használunk Binomiális eloszlást? *(5p)*
b) Mikor használunk Poisson eloszlást? *(5p)*
c) Ha $X \sim Bin(n,p)$ és $\mathbb{E}(X) = 50$ és $\mathbb{D}(X) = 5$ akkor mennyi n és k? *(5p)*

Megoldás:

a) Amikor n kísérletet végzünk, mindegyik a többitől függetlenül p valószínűséggel sikeres akkor $X =$ a sikerek száma binomiális eloszlású. (5p)

b) Ugyanaz mint fent, de $n \to \infty$ $p \to 0$, de $\mathbb{E}(X) = np$ állandó akkor Poisson eloszlásról beszélünk. (5p)

c) $np = 50$ és $np(1-p) = 25$ ebből $1 - p = 1/2 \Rightarrow p = 1/2 \Rightarrow n = 100$. (5p)

3 a) Definiálja a várható értéket diszkrét valószínűségi változó esetén! *(5p)*
b) Mik a szórás tulajdonságai? *(6p)*
c) Mi annak a valószínűségi változónak a szórása aminek az eloszlása

x	1	0	-2
$P(X = x)$	0,4	0,4	0,2

(9p)

Megoldás:

a) $\mathbb{E}(X) = \sum_{k \in Im(X)} k \cdot P(X = k)$ *(5p)*

b)
1. $\mathbb{D}(aX) = |a|\mathbb{D}(X)$
2. $\mathbb{D}(X + b) = \mathbb{D}(X)$
3. $\mathbb{D}(X) >= 0$
4. $\mathbb{D}^2(X + Y) = \mathbb{D}^2(X) + \mathbb{D}^2(Y) + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y)$
5. $\mathbb{D}^2(X + Y) = \mathbb{D}^2(X) + \mathbb{D}^2(Y)$ *ha X és Y független.*

Mindegyikre (2p), de 6 pontnál azért ne kapjon többet.

c) $\mathbb{E}(X) = 0$ *(4p) így* $\mathbb{D}^2(X) = \mathbb{E}(X^2) = 1 \cdot 0{,}4 + 4 \cdot 0{,}2 = 1{,}2$. *(5p)*

Gyakorlati feladatok

1 A Lángoló Rózsa kolostorban a lakók negyede novícia, a többi nővér. A noviciák negyede evett káposztás tésztát. A káposztás tésztát evőknek kétharmada nővér volt. Mennyi volt a káposztás tésztát evők aránya? *(15p)* *Megoldás:*
Legyen K =Káposztástésztát evett, N =novícia, A =Apáca.(3p) A felqadatból tudjuk, hogy $P(N) = \frac{1}{4}$, $P(K|N) = \frac{1}{4}$, $P(A|K) = \frac{2}{3}$ *(3p) ebből* $P(N|K) = \frac{1}{3}$ *(3p) A Bayes tételből:* $P(K|N) = P(N|K)\frac{P(K)}{P(N)}$ *(3p) vagyis*

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{3}\frac{P(K)}{\frac{1}{4}}$$

Tehát $P(K) = \frac{3}{16}$ *(3p)*

2 A kolostorban az ebéd imával kezdődik. Az evés előtti közös ima hosszának sűrűségfüggvénye

$$f(x) = \begin{cases} c \cdot x^2, & \text{ha } 2 < x < 4 \\ 0, & \text{különben} \end{cases}$$

a) Mennyi c értéke? *(5p)*
b) Mennyi az ima hosszának várható értéke, és szórása? *(7p)*
c) Angelina nővér 3,5 percet késik. A Tisztelendő Anyának egy perccel az ima után el kell mennie, mi a valószínűsége, hogy látják egymást az ebédnél? *(8p)*

Megoldás:
a)

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = c\int_2^4 x^2\,\mathrm{d}x = c\left[\frac{x^3}{3}\right]_2^4 = c\frac{64-8}{3} = c\frac{56}{3} \Rightarrow c = \frac{3}{56}$$

b)

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{56}\int_2^4 x\cdot x^2\,\mathrm{d}x = \frac{3}{56}\left[\frac{x^4}{4}\right]_2^4 = \frac{3}{56}[64-4] = \frac{180}{56}(3p)$$

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{3}{56}\int_2^4 x^2\cdot x^2\,\mathrm{d}x = \frac{3}{56}\left[\frac{x^5}{5}\right]_2^4 = \frac{3}{56}\left[\frac{1024}{5} - \frac{32}{5}\right] = \frac{3}{56}\frac{992}{5}(2p)$$

$$\mathbb{D}^2(X) = \frac{3\cdot 992}{5\cdot 56} - \frac{180^2}{56^2} \approx= 0.29(1p)$$

$$\mathbb{D}(X) = \sqrt{\mathbb{D}^2(X)} = 0.544(1p)$$

c) Legyen I az ima hossza. Találkoznak, ha $I + 1 > 3{,}5$, vagyis $I > 2{,}5$ Tehát

$$P(I > 2{,}5)(5p) = \int_{2.5}^4 \frac{3}{56}x^2\,\mathrm{d}x = \frac{3}{56}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{2,5}^4 = \frac{3}{56}\frac{64-\frac{125}{8}}{3} \approx 0{,}86(3p)$$

3 A Lángoló Rózsa kolostorban sok apáca él. Naponta átlagosan ketten gyónnak. A gyóntató pap hétfő-kedden beteg volt.

a) Mi a valószínűsége, hogy az apácák ezt észre sem veszik? (Indokolja a használt eloszlás jogosságát!) *(5p)*
b) Ha hétfőn legalább 3-an akarnának gyónni, kedden jön egy helyettes pap (és ő a keddieket is gyóntatja). Mi a valószínűsége, hogy szerdára nincs maradék? *(10p)*

megoldasa) Legyen H = Hétfői gyókók száma ($H \sim Poi(2)$ a b)-hez kell majd) HK =Hétfőn és kedden gyónók száma(2p)
Ekkor $HK \sim Poi(4)$ (hiszen ha egy nap ketten a két nap átlagosan négyen gyónnak.) $P(HK = 0) = e^{-4}$(3p)
b) Nincs maradék a fenti jelölésekkel: $P(H \geq 3 \vee HK = 0) = \mathrm{P}(H \geq 3) + \mathrm{P}(HK = 0)(6p) = 1 - e^{-2} - \frac{2}{1}e^{-2} - \frac{2^2}{2!}e^{-2} + e^{-4}$