Név: ....

Neptun kód: ....

	1	2	3	$\sum$
E				
Gy				

Gyakorlat amire jársz:

Nagy Ilona	Szerda	Csütörtök
Benedekfi Örs		Csütörtök
Farkas Lóránt	Szerda	
Pataki Gergely	Szerda	Csütörtök
Szabó Sándor		Csütörtök
Elővizsgára elmennék	Igen	Nem

Elméleti feladatok

1 a) Mi a kovariancia definíciója? *(5p)*
b) Mik a kovariancia tulajdonságai? *(10p)*

Megoldás:

a) $\operatorname{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

b)

1. *Szimmetrikus:* $\operatorname{Cov}(X,Y) = \operatorname{Cov}(Y,X)$
2. $\operatorname{Cov}(X,X) = \mathbb{D}^2(X)$
3. $|\operatorname{Cov}(X,Y)| \leq \mathbb{D}(X)\mathbb{D}(Y)$
4. $\operatorname{Cov}(aX + B,cY + d) = ac\operatorname{Cov}(X,Y)$
5. $\operatorname{Cov}(X,aY + b + cZ + d) = a\operatorname{Cov}(X,Y) + b\operatorname{Cov}(X,Z)$
6. *Ha X és Y független akkor* $\operatorname{Cov}(X,Y) = 0$.
7. *Ha* $\operatorname{Cov}(X,Y) = 0$ *attól még nem miztos hogy függetlenek.*
8. $\mathbb{D}^2(X + Y) = \mathbb{D}^2(X) + \mathbb{D}^2(Y) + 2\operatorname{Cov}(X,Y)$

Mindegyikre (2p), de 10 pontnál azért ne kapjon többet.

2 a) Mit mond ki a DeMoivre-Laplace tétel? *(5p)*
b) Mit értünk Normális eloszlású valószínűségi változók standardizálásán? *(5p)*
c) Ha $X \sim N(7,3)$ akkor körülbelül mennyi $\mathrm{P}(1 < X < 13)$? *(5p)*

Megoldás:

a) b)Ha $X \sim N(m,\sigma)$ *akkor* $\frac{X-m}{\sigma} \sim N(0,1)$

c)Az 1σ, 2σ, 3σ *szabály szerint* $\approx$ *95%(Ha rendesen kiszámolja, hogy* $2\Phi(2) - 1$ *azt is elfogadjuk)*

3 a) Mit értük statisztikai mintán? *(5p)*
b) Mit jelent, hogy az f statisztika torzítatlan becslése a p paraméternek? *(5p)*
c) Ha a statisztikai mintám:

$$3, 8, 6, 10, 6, 8, 8$$

akkor mi a tapasztalati várható érték?

Megoldás:

a) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *statisztikai minta ha független, azonos eloszlású valószínűségi változók realizációja.*

b) Az f statisztika torzítatlan becslése a p paraméternek, ha

$$\mathbb{E}(f(X_1, X_2, X_3, \ldots, X_n)) = p$$

c) $\overline{X} = 7$

Gyakorlati feladatok

1 Az isten háta mögötti menzán ahova csak busszal lehet eljutni, egy ember kiszolgálásának ideje olyan valószínűségi változó, melynek várható értéke 1 perc 20 másodperc, szórása 20 másodperc. A 12:30-as busszal 25 ember jön be az üres menzára. Mennyi a valószínűsége, hogy 30 perc alatt végeznek (és így a következő busz előtt lesz a konyhásoknak 5 perc szünetük)? *(15p)* *Megoldás:*

Legyen X_i =Az i-edik kiszolgálás hossza(3p). 30 perc 1800 másodperc. Ekkor a Centrális Határeloszlás Tétele szerint $X_1 + X_2 + \cdots + X_{25} \sim N(25 \cdot 80 = 2000, \sqrt{25} \cdot 20 = 100)$(5p) tehát

$$\mathrm{P}(X_1 + X_2 + \cdots + X_{25} \leq 1800) = \mathrm{P}\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_{25} - 2000}{100} \leq \frac{1800 - 2000}{100}\right)(4p) = \Phi(-2) = 1 - \Phi(2)$$
$$= 1 - 0{,}97725(3p) \approx 2{,}2\%$$

2 Egy új, hátviszketés elleni kenőcs embereknél kettős látást okoz. Ennek valószínűségét az összes a kísérletben gyógyszert kapott betegnél fellépő kettős látás arányával becsülik.

a) Adjon felső becslést annak valószínűségére, hogy a becslés 5%-nál nagyobb mértékben eltér valódi valószínűségtől, ha csak 200 ember kapott eddig gyógyszert! *(5p)* Rájöttek, hogy ez a tünet csak a göndör hajúaknál következhet esetleg be. Hogyan módosul a becslés ha tudjuk, hogy a göndör hajúak aránya a népességben 25%? *(5p)*

b) Egy másik gyógyszer másik mellékhatása a hajhullás, aminek valószínűségét hasonlóan próbálják megbecsülni. Hány embernek kéne megkapni a gyógyszert, ha azt szeretnénk, hogy legalább 90%-os valószínűséggel vétsenek 5%-nál kisebb hibát? *(5p)*

Megoldás:

a) Nagy számok törvénye alapján:

$$\mathrm{P}(|\overline{X} - p| \geq 0{,}05) \leq \frac{1}{4 \cdot 200 \cdot \left(\frac{1}{20}\right)^2}(3p) = \frac{1}{4 \cdot 200 \cdot \frac{1}{400}} = \frac{1}{2}(2p)$$

Ha tudjuk hogy $p(1-p)$ kisebb mint $\frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$ akkor

$$\mathrm{P}(|\overline{X} - p| \geq 0{,}05) \leq \frac{3}{16 \cdot 200 \cdot \left(\frac{1}{20}\right)^2}(3p) = \frac{3}{16 \cdot 200 \cdot \frac{1}{400}} = \frac{3}{8}(2p)$$

b)

$$\frac{1}{4 \cdot n \frac{1}{400}} \leq 0{,}1(5p) \Rightarrow \frac{100}{0{,}1} \leq n \Rightarrow 1000 \leq n(3p)$$

3 Egy év alatt Darth Vader által elkapott Jedik (X) és lázadó katonai vezetők (Y) lehetséges számát adja meg az alábbi táblázat

$X \backslash Y$	1	3	5
2	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$
4	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{18}$

a) Mik a marginális eloszlások? *(5p)*
b) független-e X és Y? *(4p)*
c) Mennyi $\mathbb{E}(Y|X=2)$? *(4p)*
d) Mennyi $\mathbb{E}(Y|X=4)$? *(4p)*
e) Mennyi $\mathbb{E}(Y|X)$ eloszlása? *(3p)*

Megoldás:

a)

x	2	4
$\mathrm{P}(X{=}x)$	$\frac{5}{18}$	$\frac{13}{18}$

(2p)

y	1	3	5
$\mathrm{P}(Y{=}y)$	$\frac{5}{18}$	$\frac{5}{18}$	$\frac{4}{9}$

(3p)

b) Nem (1p) mivel pl: $1/6 = \mathrm{P}(X=4, Y=1) \neq \mathrm{P}(X=4)\mathrm{P}(Y=1) = 13/18 * 5/18 (3p)$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y|X=2) =& 1\frac{\frac{2}{18}}{\frac{5}{18}} + 3\frac{\frac{2}{18}}{\frac{5}{18}} + 5\frac{\frac{1}{18}}{\frac{5}{18}} \\ =& 1\frac{2}{5} + 3\frac{2}{5} + 5\frac{1}{5} = \frac{2}{5} + \frac{6}{5} + \frac{5}{5} \\ =& \frac{13}{5}\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Y|X=4) =& 1\frac{\frac{3}{18}}{\frac{13}{18}} + 3\frac{\frac{3}{18}}{\frac{13}{18}} + 5\frac{\frac{7}{18}}{\frac{13}{18}} \\ =& 1\frac{3}{13} + 3\frac{3}{13} + 5\frac{7}{13} = \frac{3}{13} + \frac{9}{13} + \frac{35}{13} \\ =& \frac{46}{13}\end{aligned}$$

d)

$\mathbb{E}(Y\|X)$	$\frac{13}{5}$	$\frac{46}{13}$
P*(X=x)*	$\frac{5}{18}$	$\frac{13}{18}$

(3*p*)