

Gyakorlat amire jársz:

Név: .....	Nagy Ilona	Szerda	Csütörtök
	Benedekfi Örs		Csütörtök
	Farkas Lóránt	Szerda	
Neptun kód: .....	Pataki Gergely	Szerda	Csütörtök
	Szabó Sándor		Csütörtök

	1	2	3	$\Sigma$
E				
Gy				

*Elméleti feladatok*

- 1 a) Mi a kovariancia definíciója? (5p)
- b) Mik a kovariancia tulajdonságai? (10p)

*Megoldás:*

- a)  $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$
- b)
  1. *Szimmetrikus:*  $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$
  2.  $Cov(X,X) = D^2(X)$
  3.  $|Cov(X,Y)| \leq D(X)D(Y)$
  4.  $Cov(aX + B, cY + d) = ac Cov(X,Y)$
  5.  $Cov(X, aY + b + cZ + d) = a Cov(X,Y) + b Cov(X,Z)$

*Mindegyikre (2p)*

- 2 a) Mit mond ki a Nagy Számok Törvénye? (5p)
- b) Mit értünk Normális eloszlású valószínűségi változók standardizálásán? (5p)
- c) Ha  $X \sim N(5,2)$  akkor körülbelül mennyi  $P(1 < X < 9)$ ? (5p)

*Megoldás:*

a) *Legyenek  $X_1, X_2, \dots, X_n$  független azonos eloszlású valószínűségi változók ekkor:*

$$P(|\bar{X} - E(X)| \geq \varepsilon) \leq \frac{D(X)}{n\varepsilon^2}$$

*Ha Bernoulli-félt mondja ahol  $X_i \begin{cases} 1, & p \text{ valószínűséggel} \\ 0, & 1 - p \text{ valószínűséggel} \end{cases}$  és*

$$P(|\bar{X} - p| \geq \varepsilon) \leq \frac{p(1-p)}{n\varepsilon^2} \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}$$

*az is jó.*

b) *Ha  $X \sim N(m, \sigma)$  akkor  $\frac{X-m}{\sigma} \sim N(0,1)$*

c) *Az  $1\sigma, 2\sigma, 3\sigma$  szabály szerint  $\approx 95\%$  (Ha rendesen kiszámolja azt is elfogadjuk)*

- 3 a) Mit értük statisztikai mintán? (5p)
- b) Mit jelent, hogy egy statisztika torzítatlan becslés? (5p)
- c) Ha a statisztikai mintám:

1, 5, 5, 6, 4, 4, 3

akkor mi a tapasztalati várható érték?

*Megoldás:*

- a)  $X_1, X_2, \dots, X_n$  *statisztikai minta ha függetlenek és azonos eloszlásúak*
- b) *Az  $f$  statisztika torzítatlan becslése a  $p$  paraméternek, ha*

$$E(f(X_1, X_2, X_3, \dots, X_n)) = p$$

c)  $\bar{X} = 4$

## Gyakorlati feladatok

- 1 A Lángoló Rózsa kolostorban egy alkalommal a könyörgő imádságban 25 féle dologért imádkoznak (az ő munkájuk az imádkozás és ezt komolyan veszik). Mi a valószínűsége, hogy most 20 perc alatt végeznek, ha egy ima hosszának várható értéke 1 perc szórása fél perc? (15p) *Megoldás:*

Legyen  $X_i = A$  az  $i$ -edik imádság hossza (2p). Ekkor a *Centrális Határeloszlás Tétele* szerint  $X_1 + X_2 + \dots + X_{25} \sim N(25 \cdot 1, \sqrt{25} \cdot 0,5)$  (5p) tehát

$$P(X_1 + X_2 + \dots + X_{25} \leq 20) = P\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_{25} - 25}{2,5} \leq \frac{20 - 25}{2,5}\right) \quad (4p) = \Phi(-2) = 1 - \Phi(2) \\ = 1 - 0,97725 \quad (3p) \approx 2,2\%$$

- 2 Bergengóciában a „Busz” című bulvár híreket közlő színes napilap statisztikát jelentet meg „Napi Kérdés” címen, ahol igen-nemmel lehet felelni.

- a) Adjon felső becslést annak valószínűségére, hogy a teszt 5%-nál nagyobb mértékben eltér az emberek véleményétől, ha csak 200 embert kérdeztek meg! (7p)
- b) Hány embert kéne megkérdezniük, ha azt szeretnék, hogy legalább 80%-os valószínűséggel vétsenek 5%-nál kisebb hibát? (8p)

*Megoldás:*

a) Nagy számok törvénye alapján:

$$P(|\bar{X} - p| \geq 0,05) \leq \frac{1}{4 \cdot 200 \cdot \left(\frac{1}{20}\right)^2} \quad (4p) = \frac{1}{4 \cdot 200 \cdot \frac{1}{400}} = \frac{1}{2} \quad (3p)$$

b)

$$\frac{1}{4 \cdot n \cdot \frac{1}{400}} \leq 0,2 \quad (5p) \Rightarrow \frac{100}{0,2} \leq n \Rightarrow 500 \leq n \quad (3p)$$

- 3 A Lángoló Rózsa kolostorban a gyóntató pap által kirótt „Miatyánk...” ( $X$ ) és „Üdvözlégy...” ( $Y$ ) számát adja meg az alábbi táblázat

$X \setminus Y$	5	10	20
5	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$
15	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{9}$
35	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$

- a) Mik a marginális eloszlások? (6p)
- b) független-e  $X$  és  $Y$ ? (4p)
- c) Mennyi  $Cov(X, Y)$ ? (10p)

*Megoldás:*

a)

$x$	5	15	35
$P(X=x)$	$\frac{4}{18}$	$\frac{9}{18}$	$\frac{5}{18}$

 (3p)

$y$	5	10	20
$P(Y=y)$	$\frac{4}{18}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{7}{18}$

 (3p)

b) A