Név: ....

Neptun kód: ....

Gyakorlat amire jársz:

Nagy Ilona	Szerda	Csütörtök
Benedekfi Örs		Csütörtök
Farkas Lóránt	Szerda	
Pataki Gergely	Szerda	Csütörtök
Szabó Sándor		Csütörtök

	1	2	3	$\sum$
E				
Gy				

Elméleti feladatok

1 a) Mi a korreláció definíciója? *(5p)*
b) Mik a korreláció tulajdonságai? *(5p)*
c) Ha $Y = X + 5$ akkor mennyi $Corr(X,Y) = r(X,Y)$? *(5p)*

Megoldás:

a) $r(X,Y) = \mathrm{Corr}(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathbb{D}(X)\mathbb{D}(Y)}$

b)

a) $\mathrm{Corr}(Y,X) = \mathrm{Corr}(X,Y)$ *(2p)*

b) $|\mathrm{Corr}(X,Y)| \leq 1$ *(3p)*

c) $\mathrm{Corr}(X,Y) = 0$ *Ha X és Y függetlenek (2p)*

d) Fordítva nem igaz, ha $\mathrm{Corr}(X,Y) = 0$*, nem következik, hogy függetylenek. (2p) (összesen csak 5 pontot kaphat)*

c) Mivel $\mathrm{Cov}(X,X+5) = \mathrm{Cov}(X,X) = \mathbb{D}(X)$ *ezért* $\mathrm{Corr}(X,X) = 1$ *(5p)*

2 a) Mit mond ki a Centrális Határeloszlás Tétel? *(5p)*
b) Mit értünk Normális eloszlású valószínűségi változók standardizálásán? *(5p)*
c) Ha $X \sim N(5,2)$ akkor körülbelül mennyi $\mathrm{P}(1 < X < 9)$? *(5p)*

Megoldás:

a) Ha $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *független azonos eloszlású valószínűségi változók melyekre* $\mathbb{E}(X_i) = 0$, $\mathbb{D}(X_i) = \sigma$ *és* $\mathbb{E}(X_i^3) < \infty$ *akkor:*

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}} \sim N(0,\sigma), \quad \text{ha } n \text{ elég nagy}$$

De elfogadható az az alak melyben $\mathbb{E}(X_i) = m$

$$\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} \sim N(0,1), \quad \text{ha } n \text{ elég nagy}$$

vagy

$$X_1 + X_2 + \ldots X_n \sim N(nm, \sqrt{n}\sigma), \quad \text{ha } n \text{ elég nagy}$$

b) Ha $X \sim N(m,\sigma)$ *akkor* $\frac{X-m}{\sigma} \sim N(0,1)$

c) Az 1σ, 2σ, 3σ *szabály szerint* $\approx$ *95%(Ha rendesen kiszámolja azt is elfogadjuk)*

3 a) Mit értük statisztikai mintán? *(5p)*
b) Ha a statisztikai mintám:

$$1, 5, 5, 6, 4, 4, 3$$

akkor mi a tapasztalati variancia/szórásnégyzet? *(10p)*

Megoldás:

a) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *statisztikai minta ha függetlenek és azonos eloszlásúak*

b) $\overline{X} = 4$, *így* $S^2 = \frac{(1-4)^2+(5-4)^2+(5-4)^2+(6-4)^2+(4-4)^2+(4-4)^2+(3-4)^2}{7} = \frac{16}{7}$

Gyakorlati feladatok

1 A Lángoló Rózsa kolostorban influenza járvány tör ki. A vírus, 60% valószínűséggel betegít meg egy átlag embert. Mi a valószínűsége, hogy 35, vagy ennél kevesebb megbetegedés lesz, ha a kolostorban 77-en laknak, és a kolostorlakók egészségi állapota átlagosnak mondható? Közelítsük a valószínűséget a normális eloszlás táblázat használatával! *(6p+9p)*

Megoldás:

Legyen M =Megbetegedések száma.(2p) $M \sim Bin(77, 0{,}6)$ *(2p)* $P(M \leq 35) = \sum_{i=1}^{3} 5\binom{77}{i}(0{,}6)^i(0{,}4)^{77-i}$ *(2p).* *Viszont DeMoivre-Laplace tételből tudjuk, hogy* $Bin(n{,}p) \to N(np, \sqrt{np(1-p)})$*, ha* $n \to \infty$ *(3p)* $P(M \leq 35) = P\left(\frac{M-46{,}2}{4{,}29} \leq \frac{35-46{,}2}{4{,}29}\right)(3p) = \Phi(-2{,}60) = 1 - \Phi(2{,}6) = 1 - 0{,}9953 = 0{,}0047 \approx 0{,}47\%$ *(3p) Ha 36-al, vagy 35,5-el számol akkor is kapjon ugyanennyi pontot.*

2 Bergengóciában a „TroliBusz” című bulvár híreket közlő színes hetilap statisztikát jelentet meg „Napi Kérdés” címen, ahol igen-nemmel lehet felelni.

a) Adjon felső becslést annak valószínűségére, hogy a teszt 10%-nál nagyobb mértékben eltér az emberek véleményétől, ha 100 embert kérdeztek meg! *(7p)*

b) Hány embert kéne megkérdezniük, ha azt szeretnénk, hogy legalább 90%-os valószínűséggel vétsenek 10%-nál kisebb hibát? *(8p)*

Megoldás:

a)Nagy számok törvénye alapján:

$$P(|\overline{X} - p| \geq 0{,}1) \leq \frac{1}{4 \cdot 100 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2}(4p) = \frac{1}{4 \cdot 100 \cdot \frac{1}{100}} = \frac{1}{4}(3p)$$

b)

$$\frac{1}{4 \cdot n\frac{1}{100}} \leq 0{,}1(5p) \Rightarrow \frac{100}{0{,}4} \leq n \Rightarrow 250 \leq n(3p)$$

3 Az ξ változó jelentse a napi konyhai munka hosszát (órában), η az apáca derűjét. Az együttes sürűségfüggvényük:

$$f_{\xi,\eta}(x,y) = \begin{cases} c(3x+y) & \text{, ha } 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{, különben} \end{cases}$$

a) Mi c értéke? *(5p)*

b) Mi ξ és η perem-sűrűségfüggvénye? *(5p)*

c) Mennyi $Cov(\xi,\eta)$? *(8p)*

d) független-e ξ és η? *(2p)*

Megoldás:

a)

$$\int_0^1 \int_0^2 c(3x+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = c\int_0^1 2(y+3)\,\mathrm{d}y(3p) = c \cdot 7 \Rightarrow c = \frac{1}{7}(2p)$$

b) $f_\eta(y) = \frac{2(y+3)}{7}$ *(1p) (Már egyszer kiszámolta)* $f_\xi(x) = \frac{3x}{7} + \frac{1}{14}$ *(4p) (Ha fent fordítva számol kapjon fordítva pontot)*

c) $\mathbb{E}(XY) = \int_0^1 \int_0^2 xy\frac{3x+y}{7}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{2}{3}$ *(3p)* $\mathbb{E}(X) = \int_0^2 x f_\xi(x)\,\mathrm{d}x = \frac{9}{7}$ *(2p),*
$\mathbb{E}(Y) = \int_0^1 y f_\eta(y)\,\mathrm{d}x = \frac{11}{21}$ *(2p),* $\mathrm{Cov}(\xi,\eta) = \frac{2}{3} - \frac{9}{7}\frac{11}{21} = -\frac{1}{147}$

d) Mivel a kovariancia nem 0 nem függetlenek (2p) (Más indoklás is jó.)