Matematika A1 1. Zárthelyi

2021. október 22.

A dolgozat írása során semmilyen segédeszköz nem használható! Rendelkezésre álló idő: 90 perc. Jó munkát!

1. A BME villamosmérnök hallgatói a következő fogadalmakat tették a bolygó megóvása érdekében: 40%-uk megfogadta, hogy többet nem vásárol PETpalackos italt, 25%-uk beiktat hetenként egy húsmentes napot, 33%-uk pedig komposztálásba fog: akár saját kertben, akár rendszeresen felkeresve a legközelebbi közösségi komposztálót. 20% gondolta úgy, hogy a fentiek közül kettővel is megbirkózik, de mindhármat csak 2% vállalta be. A diákok hány százaléka

   (a) éli ily módon fenntarthatóbban az életét?

   (b) tett pontosan 2 felajánlást?

   (c) tett legfeljebb egy felajánlást?

   Megoldás $|(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(A\cap C)| = |A\cap B| + |B\cap C| + |A\cap C| - 2|A\cap B\cap C|$

   (a) $40\% + 25\% + 33\% - (20\% + 2\cdot 2\%) + 2\% = 76\%$ (8 pont)

   (b) $20\% - 2\% = 18\%$ (4 pont)

   (c) $(100\% - 76\%) + (76\% - 20\%) = 80\%$ (8 pont)

2. Adja meg a p paraméter értékét úgy, hogy az $A(0,1,2)$, $B(1,0,3)$, $C(2,1,0)$, $D(1,1,p)$ pontok által meghatározott kora a tetraéder ABC oldalához tartozó magassága?
   Megoldás A tetraéder térfogata az $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$ vektorok által meghatározott parallelepipedon térfogatának hatoda, így a vegyesszorzatból számoljuk. (4 pont)

   $$18 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & p-2 \end{vmatrix} = |2 + 2(p-2)| \qquad \text{(5 pont)}$$

   Így $p = 10$ vagy $p = -8$. (2 pont)
   Másrészt a térfogat az ABC oldal területe (ami $|\vec{AB}\times\vec{AC}|/2$) és a magasság szorzatának harmada. (4 pont)

   $$\begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (2,4,2), \qquad \text{(3 pont)}$$

   így $m = 18/\sqrt{24} = 9/\sqrt{6}$. (2 pont)

3. Számoljuk ki az $x = t+1$, $y = 2-t$, $z = 2t+3$ egyenes és a $2x+3y-z=-1$ sík metszéspontjának távolságát az $\frac{4-x}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z+1}{5}$ egyenletrendszerű egyenestől.
Megoldás A metszéspontot megadó t paraméterértékre
$2(t+1)+3(2-t)-(2t+3) = -1$ (4 pont)
így $t = 2$, és a metszéspont $M(3,0,7)$. (4 pont)
A pont és az egyenes távolságához kell az egyenes két pontja, mondjuk $P(4,2,-1)$ és $Q(2,5,4)$, vagy egy pontja és az irányvektora: $\underline{v} = (-2,3,5)$ (2 pont)
Ekkor a pont és egyenes távolsága: $\frac{|\vec{MP}\times\vec{PQ}|}{|\vec{PQ}}| = \frac{|\vec{MP}\times\underline{v}|}{|\underline{v}|} = \frac{\sqrt{34^2+11^2+7^2}}{\sqrt{38}}$, (6 pont)

$$\text{mert} \quad \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 1 & 2 & -8 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = (34,11,7), \qquad \text{(4 pont)}$$

4. Hozzuk trigonometrikus alakra a következő komplex számot!

$$z = \frac{(1+i)^2(1+\sqrt{3}i)^4}{(1-\sqrt{3}i)^5} - i^{2021}$$

Megoldás $(1+i)^2 = (\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}))^2 = 2(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$
$(1+\sqrt{3}i)^4 = (2(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}))^4 = 2^4(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3})$
$(1-\sqrt{3}i)^5 = (2(\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})))^5 = 2^5(\cos(-\frac{5\pi}{3}) + i\sin(-\frac{5\pi}{3}))$, így

$$\frac{(1+i)^2(1+\sqrt{3}i)^4}{(1-\sqrt{3}i)^5} = \frac{2\cdot 2^4}{2^5}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi}{3}+\frac{5\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{4\pi}{3}+\frac{5\pi}{3}\right)\right) = -i$$

és $i^{2021} = i$, tehát $z = -2i = 2(\cos(-\frac{\pi}{2}) + \sin(-\frac{\pi}{2}))$. (Minden sor 4 pont.)

5. Határozzuk meg az alábbi sorozat határértékét!

$$a_n = (\sqrt{n^3-n^2+1} - \sqrt{n^3+n-3})\left(\frac{3n^2+6}{4n^2-1}\right)^{5n-4}.$$

Megoldás $\sqrt{n^3-n^2+1} - \sqrt{n^3+n-3} = \dfrac{-n^2-n+4}{\sqrt{n^3-n^2+1}+\sqrt{n^3+n-3}} =$

$$= \sqrt{n}\cdot\frac{-1-\frac{1}{n}+\frac{4}{n^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}-\frac{3}{n^3}}} \qquad \text{(6 pont)}$$

és mivel $\dfrac{3n^2+6}{4n^2-1} \to \dfrac{3}{4}$ (4 pont)

$0 < \sqrt{n}\left(\dfrac{3n^2+6}{4n^2-1}\right)^{5n-4} < \sqrt{n}\left(\dfrac{3}{4}+\varepsilon\right)^{5n-4} \to 0,$ (6 pont)

így, mivel $\frac{-1-\frac{1}{n}+\frac{4}{n^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}-\frac{3}{n^3}}}$ korlátos, $a_n \to 0$ (4 pont)

IMSC. Tegyük fel, hogy az (a_n) sorozat konvergens, és határértéke A. Igazoljuk, hogy ekkor az $A_n = \dfrac{a_1 + \dots + a_n}{n}$ sorozat is konvergens. Mi lesz a határértéke?

Megoldás Legyen $\varepsilon > 0$. Mivel $a_n \to A$, így létezik N_1, hogy $n > N_1$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon/2$

$$|A_n - A| \leq \frac{|a_1 - A| + \dots |a_N - A|}{n} + \frac{|a_{N+1} - A| + \dots |a_n - A|}{n}$$

Itt a második tag kisebb, mint $\varepsilon/2$, az első pedig 0-hoz tart, vagyis elég nagy $n > N_2 > N_1$ esetén szintén kisebb, mint $\varepsilon/2$. (10 pont)