Logika

Definíció Állításoknak (ítéleteknek, kijelentéseknek) nevezzük azokat a kijelentéseket, melyek igazak vagy hamisak (logikai értékek).

Logikai műveletek:

- konjunkció = ÉS: $\wedge$
- diszjunkció = VAGY: $\vee$ (megengedő vagy, nem kizáró)
- negáció = tagadás: $\neg$
- implikáció = ha ... akkor ... : $\Rightarrow$
- ekvivalencia = akkor és csak akkor: $\Leftrightarrow$

Igazságtáblás definíció

P	Q	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$\neg P$	$P \Rightarrow Q$	$P \Leftrightarrow Q$
i	i	i	i	h	i	i
i	h	h	i	h	h	h
h	i	h	i	i	i	h
h	h	h	h	i	i	i

Állítás $P \Rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$

P	Q	$\neg P$	$\neg P \vee Q$	$P \Rightarrow Q$
i	i	h	i	i
i	h	h	h	h
h	i	i	i	i
h	h	i	i	i

Tétel

1. asszociativitás:
   $(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$
   $(P \vee Q) \vee R \equiv \vee(Q \vee R)$
2. disztributivitás:
   $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
   $P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$
3. elnyelés
   $(P \wedge Q) \vee Q \equiv Q$
   $(P \vee Q) \wedge Q \equiv Q$

4. De Morgan azonosság:
   $\neg(P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$
   $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$

Példa: $p \Leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$p \wedge q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$	$(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q)$
i	*i*	**i**	*i*	*h*	*h*	*h*	**i**
i	*h*	**h**	*h*	*h*	*i*	*h*	**h**
h	*i*	**h**	*h*	*i*	*h*	*h*	**h**
h	*h*	**i**	*h*	*i*	*i*	*i*	**i**

Megjegyzés 0: azonosan hamis, 1: azonosan igaz
$P \wedge 1 = p$, $P \vee 1 = 1$, $P \wedge 0 = 0$, $P \vee 0 = P$.

Definíció Nyitott mondatnak vagy logikai függvények nevezzük azokat az állításokat, amelyek változókat tartalmaznak, és az igazságtartalmuk attól függ, hogy mit helyettesíttük be.

Példa: $N(x) = x$ négyzetszám.

- univerzális kvantor: $(\forall x)A(x)$
- egzisztenciális kvantor: $(\exists x)A(x)$
- $\exists!$ pontosan egy létezik (egzisztencia és unicitás)

Állítás:

- $\neg((\forall x)A(x)) = (\forall x)\neg A(x)$
- $\neg((\exists x)A(x)) = (\exists x)\neg A(x)$

Bizonyítási módszerek:

1. Bizonyítás lánckkövetkeztetéssel $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R) \Rightarrow (P \Rightarrow R))$
   Példa: Ha $a_1, \ldots, a_n \geq 0$, akkor

$$G_n = \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} = A_n,$$

   és egyenlőség csak akkor teljesül, ha $a_1 = \ldots = a_n$. Tegyük fel, hogy $a_1 = \min_{1 \leq i \leq n} a_i \neq \max_{1 \leq i \leq n} a_i = a_n$, és legyen $a_1' = A_n$, $a_n' = a_1 + a_n - A_n$, és $a_i' = a_i$, ha $1 < i < n$. Ekkor

$$A_n' = \frac{a_1' + \ldots + a_n'}{n} = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} = A_n,$$

és mivel $0 < (A_n - a_1)(a_n - A_n) = A_n a_n - a_1 a_n - A_n^2 + a_1 A_n$, így $A_n(a_1 + a_n - A_n) > a_1 a_n$, és

$$G_n' = \sqrt[n]{a_1' \dots a_n'} = \sqrt[n]{A_n a_2 \dots a_{n-1}(a_1 + a_n - A_n)} > \sqrt[n]{a_1 \dots a_n} = G_n,$$

tehát a számtani közép nem változik, a mértani viszont nő, ha az egyik elemt a számtani középre cseréljük. Legfeljebb n lépésben minden elemet lecserélhetünk a számtani középre, és ha minden szám egyenlő, akkor a számtani közép megegyezik a mértanival.

Következmény $(1 + \frac{1}{n})^n < 4$, $n \in \mathbb{N}$, ugyanis használhatjuk a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenséget, az $a_1 = \dots = a_n = 1 + \frac{1}{n} \neq a_{n+1} = a_{n+2} = \frac{1}{2}$ számokra. Ekkor

$$\sqrt[n+2]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{4}} < \frac{n\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1}{n+2} (= 1).$$

Továbbá $(1 + \frac{1}{n})^n < (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}, n \in \mathbb{N}$, ugyanis használhatjuk a számtani és mértani közepek közti egyenlőtlenséget, az $a_1 = \dots = a_n = 1 + \frac{1}{n} \neq a_{n+1} = 1$ számokra. Ekkor

$$\sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} < \frac{n\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1}{n+1} \left(= 1 + \frac{1}{n}\right).$$

2. Bizonyítás kontrapozícióval: $(P \Rightarrow Q) \equiv (\neg Q \Rightarrow \neg P)$
   Példa: Ha $n, m \in \mathbb{N}$, és $n + m \geq 49$, akkor $(n \geq 25) \vee (m \geq 25)$. Ugyanis $(\neg(n \geq 25) \vee (m \geq 25)) \equiv (\neg(n \geq 25) \wedge \neg(m \geq 25)) \equiv (n \leq 24) \wedge (m \leq 24)$ és ekkor $n + m \leq 48$.

3. Indirekt bizonyítás: $(\neg P \Rightarrow Q) \wedge (\neg P \Rightarrow \neg Q) \Rightarrow P$
   Példa $\sqrt{2}$ irracionális, ugyanis tegyük fel, hogy racionális, és legyen $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, ahol $p, q \in \mathbb{Z}$, és legnagyobb közös osztójuk 1. Ekkor $2 = \frac{p^2}{q^2}$, tehát $p^2 = 2q^2$. Így p páros, vagyis $p = 2r$, amiből $4r^2 = 2q^2$, tehát q is páros, ami ellentmond annak, hogy p és q legnagyobb közös osztója 1.

4. Teljes indukció $A(1) \wedge (A(n) \Rightarrow A(n+1))(\forall n) \Rightarrow A(n)(\forall n)$
   Példa Bernoulli-egyenlőtlenség: Ha $x \geq -1$, akkor $(1 + x)^n \geq 1 + nx$, $\forall n \in \mathbb{N}$, mert

   I $n = 1$ esetén $(1 + x)^1 \geq 1 + x$

   II $(1+x)^n \geq 1+nx \Rightarrow (1+x)^{n+1} \geq (1+nx)(1+x) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1 + (n+1)x$.

   Megjegyzés $x \geq 0$ esetén a fenti egyenlőtlenség következik a binomiális tételből:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \qquad \text{ahol } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Halmazalgebrák

Algebra: kommutatív, asszociatív összeadás, szorzás egységelemmel, zéruselemmel

Definíció I alaphalmaz, $A, B \subseteq I$. Ekkor $x \in (A \cap B) \equiv (x \in A) \wedge (x \in B)$, $x \in (A \cup B) \equiv (x \in A) \vee (x \in B)$, $x \in \overline{A} \equiv \neg(x \in A)$. $A \subseteq B$ azt jelenti, hogy $\forall x(x \in A \Rightarrow x \in B)$. Két halmaz egyenlő, ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq A$

Tétel Legyen $A, B, C \subset I.ekkor$

1. asszociativitás:
   $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
   $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
2. disztributivitás:
   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
3. egységelem, zéruselem
   $A \cap I = A$, $A \cup I = I$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup \emptyset = A$.
4. De Morgan azonosság:
   $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$
   $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}$
5. komplementer: $A \cup \overline{A} = I$, $A \cap \overline{A} = \emptyset$

   Megjegyzés $A \setminus B = A \cap \overline{B}$.

Példa $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus (A \cap C)$, mert $A \cap (B \setminus C) = A \cap B \cap \overline{C}$, és $(A \cap B) \setminus (A \cap C) = (A \cap B) \cap \overline{(A \cap C)} = (A \cap B) \cap (\overline{A} \cup \overline{C}) = (A \cap B \cap \overline{A}) \cup (A \cap B \cap \overline{C}) = \emptyset \cup (A \cap B \cap \overline{C}) = A \cap B \cap \overline{C}$.

Példa $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$, mert $(A \setminus B) \setminus C = A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$, és $(A \setminus C) \setminus (B \setminus C) = A \cap \overline{C} \cap \overline{B \cap \overline{C}} = A \cap \overline{C} \cap (\overline{B} \cup C) = (A \cap \overline{C} \cap \overline{B}) \cup (A \cap \overline{C} \cap C) = (A \cap \overline{C} \cap \overline{B}) \cup \emptyset = A \cap \overline{C} \cap \overline{B}$.

Példa $(A \setminus B) \cup B = A$ akkor és csak akkor, ha $B \subset A$, mert $(A \setminus B) \cup B = (A \cap \overline{B}) \cup B = (A \cup B) \cap (\overline{B} \cup B) = A \cup B$. Vagyis azt kaptuk, hogy $A \cup B = A$ akkor és csakis akkor ha $B \subset A$.
Most ezt bebizonyítjuk: tegyük fel, hogy $B \subseteq A$ azaz $\forall x(x \in B \Rightarrow x \in A)$. Ha $x \in A \cup B$ akkor vagy $x \in A$ vagy $x \in B \Rightarrow x \in A$ tehát akkor $x \in A$ vagyis $A \cup B \subseteq A$, fordítva: ha $x \in A$ akkor abból következik, hogy $x \in A \vee x \in B$ tehát $A \subseteq A \cup B$ (ezzel azt is beláttuk, hogy $A \subseteq A \cup B$ mindig igaz). Tegyük fel hogy $B \nsubseteq A$ ekkor $\exists x(x \in B \wedge x \notin A)$ ekkor viszont $A \cup B \nsubseteq A$ tehát $A \neq A \cup B$.

Példa $(A \cup B) \setminus B = A$ akkor és csak akkor, ha $A \cap B = \emptyset$, mert $(A \cup B) \setminus B = (A \cup B) \cap \overline{B} = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{B}) = (A \cap \overline{B}) \cup \emptyset = A \cap \overline{B}$. Ez pontosan akkor egyezik meg az A halmazzal, ha A minden eleme a B halmaz komplementerében van, vagyis $A \cap B = \emptyset$.

Példa $(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus (B \cup C)$ akkor és csak akkor, ha $C = \emptyset$, mert $(A \setminus B) \cup C = (A \cap \overline{B}) \cup C$, és $(A \cup C) \setminus (B \cup C) = (A \cup C) \cap \overline{B} \cap \overline{C} = (A \cap \overline{B} \cap \overline{C}) \cup (C \cap \overline{B} \cap \overline{C}) = (A \cap \overline{B}) \cap \overline{C}$.
$(A \cap \overline{B}) \cup C \supset A \cap \overline{B} \supset (A \cap \overline{B}) \cap \overline{C}$, tehát egyenlőség pontosan akkor áll elő, ha $C \subset A \cap \overline{B} \subset \overline{C}$, márpedig $C \subset \overline{C}$ akkor fordulhat csak elő, ha $C = \emptyset$.

Halmazok elemszáma

$|A \cap B| \leq \min(|A|, |B|) \leq \max(|A|, |B|) \leq |A \cup B|$. $|A| + |\overline{A}| = |I|$.

Továbbá: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$, és innen
$|A \cup B \cup C| = |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C| = |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)| = |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - (|A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap C \cap B \cap C|) = A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$.

Ugyanígy többre...

Relációk

Definíció Az X, Y halmazok Descartes szorzata a belőlük alkotott rendezett párok szorzata, vagyis $X \times Y| = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$. Relációnak nevezzük ezek részhalmazait, vagyis $R \subset (x, y)$. Jelölés: $xRy, ha (x, y) \in R$. A reláció értelmezési tartománya: $DomR := \{x \in X | \exists y \in Y : (x, y) \in R\}$, értékkészlete: $RanR = \{y \in Y | \exists x : (x, y) \in R\}$.
Példa

0. $R_0 \subset \mathbb{R}^2$, $(x, y) \in R_0$, ha $x < y$.
1. $R_1 \subset \mathbb{R}^2$, $(x, y) \in R_1$, ha $x - y \in \mathbb{Q}$.
2. Legyen I tetszőleges halmaz, és $R_2 \subset \mathcal{P}(I) \times \mathcal{P}(I)$, $(A, B) \in R_2$ ha $A \subset B$.
3. $R_3 \subset \mathbb{N}^2$, $(n, k) \in R_3$, ha $n|k$.
4. $R_4 \subset$ összes ember $\times$ összes ember, $(A, B) \in R_4$, ha B gyereke A-nak.

Definíció. Egy $R \subset X \times X$ reláció lehet

- *szimmetrikus*, ha $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$. (Például R_1).
- *reflexív*, ha $(x, x) \in R \forall x \in X$ (Például R_1, R_2, R_3)
- *tranzitív* ha $((x, y) \in R) \wedge ((y, z) \in R) \Rightarrow ((x, z) \in R)$ (Például R_0, R_1, R_2, R_3.
- *ekvivalenciareláció*, ha szimmetrikus, reflexív és tranzitív (Például R_1)
- *antiszimmetrikus*, ha $((x, y) \in R) \wedge ((y, x) \in R) \Rightarrow x = y$. (Például R_0, R_2, R_3, R_4.

Függvények

Definíció Ha az R reláció olyan, hogy $((x,y) \in R) \wedge (((x,z) \in R) \Rightarrow y = z) \forall x \in X$, akkor R függvény.

Definíció Az $F \subset X \times Y$ (hagyományos jelöléssel $F : X \to Y$, $(x,y) \in F$, ha $F(x) = y$ függvény *szürjektív*, ha $\forall y \in Y(\exists x \in X((x,y) \in F))$. Például a tangens függvény szürjektív, ha $X = Y = \mathbb{R}$. Az F függvény *injektív*, ha $((x_1,y) \in F) \wedge ((x_2,y) \in F) \Rightarrow x_1 = x_2$. Ekkor létezik inverzfüggvény: $(x,y) \in F \Leftrightarrow (y,x) \in F^{-1}$. Például $F(x) = x^3 + 6x^2 + 12x = (x+2)^3 - 8 = y$ esetén $x = \sqrt[3]{y+8} - 2 = F^{-1}(y)$. Egy függvény *bijekció*, ha egyszerre szürjektív és injektív.

Definíció Az A és B halmaz elemszáma (számossága) megegyezik ($|A| = |B|$), ha létezik $F \subset A \times B$ bijekció.

Példa $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Q}|$, mert legyen a racionális számok sorba rendezhetők

$$0, -1, 1, -2, -\frac{3}{2}, -\cancel{1}, -\frac{1}{2}, \cancel{0}, \frac{1}{2}, \cancel{1}, \frac{3}{2}, 2, -3, -\frac{8}{3}, -\frac{7}{3}, -\cancel{2}, \ldots, \frac{8}{3}, 3, -4, \ldots$$

vagyis $-n$-től n-ig $\frac{1}{n}$-eket lépünk előre, és hogy bijekciót kapjunk, elhagyjuk azokat az elemeket, amelyek már korábban szerepeltek. Ennek a halmaznak a számossága *megszámlálható*.
A valós számok többen vannak, mint a racionális számok, ugyanis tegyük fel, hogy fel tudjuk sorolni a $(0,1)$ intervallum pontjait, vagyis $\{x_1, x_2, \ldots\} = (0,1)$. Ekkor, ha veszünk egy olyan számot, melnyek n-edik tizedesjegye különbözik x_n n-edik tizedesjegyétől minden n természetes számra, akkor egy olyan $(0,1)$-beli számot kapunk, ami biztosan nincs benne az $\{x_1, x_2, \ldots\}$ halmazban. Ugyanakkor minden (a,b) intervallum és a $(0,1)$ intervallum között az $f(x) = \frac{x-a}{b-a}$ leképezés bijekció, és a tangens függvény bijekciót létesít a $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ intervallum között, minden intervallum számossága megegyezik a valós számok halmazának számosságával, melynek neve *kontinuum*.

Minden nemüres (a,b) intervallumban van racionális szám, ugyanis ha $|b-a| > 10^n$, akkor $\left[\frac{10^n(a+b)}{2}\right] 10^{-n} \in \mathbb{Q} \cap (a,b)$. Ugyanakkor minden nemüres intervallum tartalmaz irracionális számot, mert az intervallum számossága kontinuum, ami nagyobb, mint a racionális számok számossága.

Valós számok axiomatikus felépítése

Műveletek:
Összeadás (kommutatív, asszociatív, van zéruselem: $\exists 0(\forall a \in \mathbb{R}(a + 0 = a))$, minden számnak van additív inverze: $(\forall a \in \mathbb{R}(\exists b \in \mathbb{R}(a + b = 0))$.
Szorzás (kommutatív, asszociatív, van egységelem: $\exists 1(\forall a \in \mathbb{R}(a \cdot 1 = a))$, minden 0-tól különböző valós számnak van multiplikatív inverze: $(\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}(\exists b \in \mathbb{R}(a \cdot b = 1))$.

Teljesül a disztributivitás: $\forall a, b, c \in \mathbb{R} : a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot b$.

Rendezés: minden $a, b \in \mathbb{R}$ esetén az $a < b$, $b < a$, $a = b$ közül pontosan az egyik teljesül. A rendezésre igaz, hogy:
$a < b \Rightarrow a + c < b + c$
$(a < b) \wedge (0 < c) \Rightarrow ac < bc$
j $(a < b) \wedge (b < c) \Rightarrow (a < c)$.
Definíció Az $A \subset \mathbb{R}$ halmaz *alulról korlátos*, ha $\exists K_1 \in \mathbb{R}(\forall a\ inA(a \leq K_1))$. Az $A \subset \mathbb{R}$ halmaz *felülről korlátos*, ha $\exists K_2 \in \mathbb{R}(\forall a \in (a \leq K_2))$.

Dedekind axióma: minden felülről korlátos $A \subset \mathbb{R}$ halmaznak van legkisebb valós felső korlátja: $\sup A$ (A *szuprémuma*). Ezzel ekvivalens: minden alulról korlátos $A \subset \mathbb{R}$ halmaznak van legnagyobb alsó korlátja: $\inf A$ (A *infimuma*).

Megjegyzés A többi axióma teljesül a racionális számok halmazára, a Dedekind azonban nem, ugyanis van olyan felülről korlátos részhalmaza a racionális számoknak, aminek nincs racionális szuprémuma, pl a $\{10^{-n}[10^n\pi] | n \in \mathbb{N}\}$ halmaz szuprémuma $\pi \notin \mathbb{Q}$.